COURS

DE

MATHÉMATIQUES.

Ouvrages du Baron Reynaud.

Traité d'Arithmétique, suivi d'une *Table de logarithmes*, à l'usage des Élèves qui se destinent aux Écoles royales Polytechnique, Militaire, de la Marine, et des Forêts (23e édit., 1843). 5 fr.

Petit Traité élémentaire d'Arithmétique, en deux parties; un volume in-12, 1835. 3 fr. 50 c.

Éléments d'Algèbre, 10e édition, 1839. 5 fr.

Cours de Mathématiques, à l'usage des Élèves de la Marine, par MM. *Reynaud*, *Nicollet* et *Gerono*; 3 v. in-8°.

1er vol., Arithmétique et Algèbre, par M. *Reynaud*, 1829. (*Epuisé.*)
2e vol., Géométrie et Trigonométrie, par M. *Nicollet*, 1829. 7 fr.
3e vol., Statique, par MM. *Reynaud* et *Gerono*, 1838. 5 fr.

Trigonométrie rectiligne et sphérique, suivie de Tables de logarithmes à cinq décimales, par Lalande (3e édition, 1818). 3 fr.

Les Tables de logarithmes se vendent séparément 2 fr.

Tables de logarithmes (à sept décimales) pour les nombres et les lignes trigonométriques, précédées d'une instruction très-détaillée sur la manière de s'en servir; in-12 (édition stéréotype, tirage de 1843 corrigé). 3 fr. 50 c.

Traité d'Application de l'Algèbre à la Géométrie (2e édit., *sous presse*).

Manuel de l'Ingénieur du Cadastre, in-4° avec 11 pl. 15 fr.

Problèmes et développements sur les diverses parties des Mathématiques, avec 11 pl. 7 fr.

Traité élémentaire de Mathématiques et de Physique, suivi de notions sur la *Chimie* et sur l'*Astronomie*, à l'usage des Élèves qui se préparent aux examens pour la Marine et le Baccalauréat ès-lettres, 4e édition, revue, corrigée et considérablement augmentée; 2 vol. in-8° avec 21 pl., 1832. 15 fr.

Le tome Ier, 1844, se vend séparément 7 fr. 50c.

Théorèmes et Problèmes de Géométrie, suivis de la *Théorie des plans* et des *préliminaires de la Géométrie descriptive*, comprenant la partie exigée pour l'admission à l'École Polytechnique, 10e édit., avec 21 pl., 1838. 5 fr.

Traité d'Arpentage de Lagrive, avec les Notes de Reynaud. 7 fr.

Notes sur Bezout.

Arithmétique, 20e édition, 1839. 2 fr. 50 c.

Notes sur l'Algèbre, (7e édition, 1834). 4 fr. 50 c.

Géométrie contenant un grand nombre de théorèmes et de problèmes, et des *Éléments de Géométrie descriptive*, 10e édit., avec pl., 1838. 4 fr. 50 c.

Nota. L'*Arithmétique* (23e édition), l'*Algèbre* (10e édition), l'*Application de l'Algèbre à la Géométrie* (comprenant la *Trigonométrie*), la *Statique*, et les Notes sur l'*Algèbre* et sur la *Géométrie*, sont particulièrement destinées aux Élèves qui se proposent d'entrer à l'École Polytechnique, à l'École Navale et à l'École Militaire de Saint-Cyr. Ces ouvrages renferment les solutions des principales difficultés relatives aux examens.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

607241

1)

COURS

DE

MATHÉMATIQUES,

A L'USAGE

DE LA MARINE ET DE L'ARTILLERIE,

PAR BEZOUT;

SECONDE PARTIE,

CONTENANT LA GÉOMÉTRIE, LA TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE ET LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

NOTES SUR LA GÉOMÉTRIE,

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE ET PROBLÈMES;

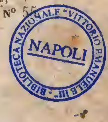
PAR A.-A.-L. REYNAUD,

Ancien Examinateur pour l'admission à l'École Polytechnique, à l'École spéciale militaire et à l'École de la Marine, Chevalier de la Légion d'Honneur et de Saint-Michel, Docteur de la Faculté des Sciences, Membre de plusieurs Académies; etc.

DIXIÈME ÉDITION.

PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1845.



PRÉFACE.

Cette seconde partie comprend, ainsi que le titre l'annonce, les Éléments de Géométrie, de Trigonométrie rectiligne, et la Trigonométrie sphérique.

Je ne m'arrêterai point à rassembler ici les raisons qui doivent engager les Élèves destinés à la Marine, à se rendre familiers les principes répandus dans ce livre. S'il est un art auquel l'application des Mathématiques soit plus utile qu'à un autre, c'est la navigation : dussé-je me répéter, je dois dire que ces sciences, qui sont utiles dans d'autres parties, sont indispensables dans celle-ci.

Il ne faut pas en conclure, cependant, qu'un livre de Géométrie élémentaire destiné à cet objet doive rassembler un grand nombre de propositions. S'il suffisait, pour bien inculquer les principes d'une science, de donner ce qui est essentiellement nécessaire au but qu'on se propose, ceux qui connaissent un peu la Géométrie savent qu'on y satisferait en peu de mots. Mais l'expérience démontre qu'un pareil livre serait utile seulement à ceux qui ont acquis déjà des connaissances, et qu'il n'imprimerait que de faibles traces dans l'esprit des Commençants.

D'un autre côté, il n'y a pas moins d'inconvénients à trop multiplier les conséquences, surtout quand elles ne sont (comme il arrive souvent) que de nou-

velles traductions des principes. Il n'est pas douteux que les Éléments destinés à un grand nombre de lecteurs doivent suppléer aux conséquences que plusieurs n'auront pas le loisir et peut-être la faculté de tirer; mais il faut prendre garde aussi que ceux pour qui cette attention est nécessaire, sont le moins en état de soutenir la multitude des propositions. Le seul parti qu'il y ait à prendre, est, ce me semble, d'aller un peu plus loin que les principes, de s'arrêter aux conséquences utiles, et de fixer ces deux choses dans l'esprit, par des applications; c'est ce que j'ai tâché de faire.

J'ai partagé la Géométrie en trois sections, dont la première traite des lignes, des angles, de leur mesure, des rapports des lignes, etc. La seconde considère les surfaces, leur mesure et leurs rapports. La troisième est destinée aux solides ou corps, et renferme les principes nécessaires pour les mesurer et comparer leurs capacités. Dans la Trigonométrie rectiligne, j'ai donné quelques propositions qui ne sont pas essentiellement nécessaires pour le moment; mais elles sont au moins utiles, et le seront encore plus par la suite: d'ailleurs quelques-unes trouvent leur application dès la Trigonométrie sphérique. Dans celle-ci, je me suis proposé de réduire à un moindre nombre les principes dont on fait dépendre communément la résolution des triangles sphériques. Je n'entrerai pas dans un plus grand détail: c'est dans l'ouvrage même qu'il faut le chercher. Ceux qui ne veulent lire que la Préface ne gagneraient pas beaucoup au temps que je perdrais à cette analyse; et

ceux qui liront l'ouvrage en jugeront mieux que par ce que je pourrais en dire ici.

Dois-je me justifier d'avoir négligé l'usage des mots *Axiome*, *Théorème*, *Lemme*, *Corollaire*, *Scolie*, etc.? Deux raisons m'ont déterminé : la première est que l'usage de ces mots n'ajoute rien à la clarté des démonstrations; la seconde est que cet appareil peut souvent faire prendre le change à des Commençants, en leur persuadant qu'une proposition, revêtue du nom de *Théorème*, doit être une proposition aussi éloignée de leurs connaissances, que le nom l'est de ceux qui leur sont familiers. Cependant, afin que ceux de mes lecteurs qui ouvriront d'autres livres de Géométrie ne s'imaginent pas qu'ils tombent dans un pays inconnu, je crois devoir les avertir que,

Axiome signifie une proposition évidente par ellemême;

Théorème, une proposition qui fait partie de la science dont il s'agit, mais dont la vérité, pour être aperçue, exige un discours raisonné qu'on appelle *Démonstration*;

Lemme (1) est une proposition qui ne fait pas essentiellement partie de la théorie dont il s'agit, mais qui sert à faciliter le passage d'une proposition à une autre;

Corollaire est une conséquence que l'on tire d'une proposition qu'on vient d'établir;

---

(1) Un *lemme* est souvent une proposition empruntée d'une autre science.

Scolie est une remarque sur quelque chose qui précède, ou une récapitulation de ce qui précède;

Problème est une question dans laquelle il s'agit ou d'exécuter quelque opération, ou de démontrer quelque proposition.

NOTA. Les nombres que l'on trouve entre deux parenthèses, dans plusieurs endroits de ce livre, sont destinés à indiquer à quel numéro on doit aller chercher la démonstration de la proposition sur laquelle on s'appuie dans ces endroits. A l'égard des numéros, ils sont au commencement des *alinéa*.

ÉLÉMENTS

DE

GÉOMÉTRIE.

1. L'espace que les corps occupent a toujours les trois dimensions, *longueur, largeur, profondeur* ou *épaisseur.*

Quoique ces trois dimensions se trouvent toujours ensemble dans tout ce qui est corps, néanmoins nous les séparons assez souvent par la pensée : c'est ainsi que, lorsque nous pensons à la profondeur d'une rivière, d'une rade, etc., nous ne sommes point occupés de sa longueur ni de sa largeur; pareillement, quand nous voulons juger de la quantité de vent qu'une voile peut recevoir, nous ne nous occupons que de sa longueur et de sa largeur, et point du tout de son épaisseur.

Nous distinguerons donc trois sortes d'étendue ; savoir :

L'étendue en longueur seulement, que nous appellerons *ligne ;*

L'étendue en longueur et largeur seulement, que nous nommerons *surface* ou *superficie;*

Enfin, l'étendue en longueur, largeur et profondeur, que nous nommerons indifféremment *volume, solide, corps.*

Nous examinerons successivement les propriétés de ces trois sortes d'étendue; c'est là l'objet de la science qu'on appelle *Géométrie.*

SECTION PREMIÈRE.

Des Lignes.

2. Les extrémités d'une ligne se nomment des *points*. On appelle aussi de ce nom les endroits où une ligne est coupée, ou encore ceux où des lignes se rencontrent.

On peut considérer le point comme une portion d'étendue qui aurait infiniment peu de longueur, de largeur et de profondeur.

La trace d'un point qui serait mû de manière à tendre toujours vers un seul et même point, est ce qu'on appelle une *ligne droite*. C'est le plus court chemin pour aller d'un point à un autre : AB(*fig.* 1) est une ligne droite.

On appelle, au contraire, *ligne courbe* la trace d'un point qui, dans son mouvement, se détourne infiniment peu, à chaque pas.

On voit donc qu'il n'y a qu'une seule espèce de ligne droite; mais qu'il y a une infinité de courbes différentes.

3. Pour tracer une ligne droite d'une étendue médiocre, comme lorsqu'il s'agit de conduire par les deux points A et B (*fig.* 1), une ligne droite sur le papier, on sait qu'on emploie une règle que l'on applique sur les deux points A et B, ou très-près, et à distances égales de ces deux points, et qu'avec un crayon ou une plume qu'on fait glisser le long de cette règle, on trace la ligne AB.

Mais, lorsqu'il s'agit de tracer une ligne un peu grande, on fixe au point A l'extrémité d'une ficelle, que l'on frotte avec un morceau de craie; et, appliquant un autre de ses points sur le point B, on pince la ficelle pour l'élever au-dessus de AB, et la laissant aller, elle marque, en s'appliquant sur la surface, une trace qui est la ligne droite dont il s'agit.



Quand il est question d'une ligne fort grande, mais dont les extrémités peuvent être vues l'une de l'autre, on se contente de marquer entre ces deux extrémités un certain nombre de points de cette ligne. Par exemple, lorsqu'on veut prendre des alignements sur le terrain, on place à l'une des extrémités B (*fig.* 2) un bâton ou jalon BD, que par le moyen d'un fil-à-plomb, on rend le plus vertical que faire se peut; on en fixe un autre de la même manière au point A, et, se plaçant à ce même point A, on fait placer successivement plusieurs autres jalons, à différents points C, C, etc., entre A et B, de manière qu'appliquant l'œil le plus près qu'il est possible du jalon AD, et regardant le jalon BD, celui CD, dont il s'agit, paraisse confondu avec BD; alors tous les points C, C, C, etc., déterminés de cette manière, sont dans la ligne droite AB.

Quand les deux extrémités A et B ne sont pas visibles l'une de l'autre, on a recours à des moyens que nous enseignerons par la suite.

4. Les lignes se mesurent par d'autres lignes; mais, en général, la mesure commune des lignes, c'est la ligne droite. Mesurer une ligne droite ou courbe, ou une distance quelconque, c'est chercher combien de fois cette ligne ou cette distance contient une ligne droite connue et déterminée, que l'on considère alors comme unité. Cette unité est absolument arbitraire; aussi y a-t-il bien des espèces de mesures différentes en fait de lignes. Indépendamment de la toise et de ses parties, dont nous avons fait connaître les subdivisions en arithmétique, on distingue encore le pas ordinaire, le pas géométrique, la brasse, etc., pour les petites étendues; la lieue, le mille, le werste, etc., pour les grandes étendues.

Le pas ordinaire est de 2 pieds et demi.

Le pas géométrique, qu'on appelle autrement pas double, est de 5 pieds.

La brasse est de 5 pieds; on compte par brasses, dans la marine, les longueurs des cordages et les profondeurs qu'on mesure à la sonde.

La lieue est composée d'un certain nombre de toises ou de pas géométriques. La lieue marine est de 2853 toises. Le mille, le werste, etc., sont pareillement des mesures itinéraires, dont la valeur, ainsi que celle de la lieue, n'est pas la même dans tous les pays, tant parce que chacune de ces espèces de mesures n'a pas partout le même nombre d'unités, c'est-à-dire le même nombre de pas, ou de toises, ou de pieds, etc., que parce que le pied, qui sert d'unité à ces toises ou à ces pas, n'est pas de même valeur partout.

5. Pour faciliter l'intelligence de ce que nous avons à dire sur les lignes, nous supposerons que les figures dans lesquelles nous les considérerons sont tracées sur une surface *plane*. On appelle ainsi une surface sur laquelle on peut appliquer exactement une ligne droite dans tous les sens.

6. De toutes les lignes courbes, nous ne considérerons, dans ces éléments, que *la circonférence du cercle*. On appelle ainsi une ligne courbe BCFDG (*fig.* 3), dont tous les points sont également éloignés d'un même point A pris dans le plan sur lequel elle est tracée. Le point A se nomme le *centre;* les lignes droites AB, AC, AF, etc., qui vont de ce point à la circonférence, se nomment *rayons;* et tous ces rayons sont égaux, puisqu'ils mesurent la distance du centre à chaque point de la circonférence.

Les lignes, comme BD, qui, passant par le centre, se terminent de part et d'autre à la circonférence, sont appelées *diamètres;* comme chaque diamètre est composé de deux rayons, tous les diamètres sont donc égaux. Il est d'ailleurs évident que tout diamètre partage la circonférence en deux parties parfaitement égales; car, si l'on conçoit la figure pliée de façon que le pli soit dans le diamètre BD, tous les points de BGD doivent s'appliquer sur BCED, sans quoi il y aurait des points de la circonférence qui seraient inégalement éloignés du centre.

Les portions BC, CE, ED, etc., de la circonférence se nomment *arcs;* et ce qu'on appelle *cercle*, c'est la surface même renfermée par la circonférence BCFDGB.



Une droite, comme DF, qui va de l'extrémité D d'un arc à l'autre extrémité F, s'appelle *corde* ou *soutendante* de cet arc.

7. Il est aisé de voir que *les cordes égales d'un même cercle ou de cercles égaux soutendent des arcs égaux, et réciproquement.* Car, si la corde DG est égale à la corde DF, en imaginant qu'on transporte la corde DG et son arc, pour appliquer DG sur DF, il est visible que le point D étant commun, et le point G tombant alors sur le point F, tous les points de l'arc DG doivent tomber sur l'arc DF, puisque, si quelqu'un de ces points ne tombait pas sur l'arc DF, l'arc DG n'aurait pas tous ses points également éloignés du centre A.

8. On est convenu de partager toute circonférence de cercle, grande ou petite, en 360 parties égales, auxquelles on a donné le nom de *degrés :* on partage le degré en 60 parties égales qu'on appelle *minutes;* chaque minute en 60 parties égales qu'on appelle *secondes;* et de toujours subdiviser de 60 en 60, en donnant aux parties consécutivement les noms *minutes, secondes, tierces, quartes, quintes,* etc.

La marque du degré est celle-ci........	$^{\circ}$
Celle de la minute..................	$'$
De la seconde......................	$''$
De la tierce.......................	$'''$
De la quarte.......................	^{iv}

Ainsi, pour marquer 3 degrés 24 minutes 55 secondes, on écrit $3^{\circ}24'55''$.

Cette division de la circonférence est admise généralement; mais des vues de commodité dans la pratique ont introduit, dans quelques parties des mathématiques pratiques, quelques usages particuliers dans la manière de compter les degrés et parties de degré. Les astronomes, par exemple, comptent les degrés par trentaines, qu'ils appellent *signes,* c'est-à-dire qu'ayant à compter $66^{\circ}42'$ par exemple, comme ce nombre renferme 2 fois 30° et $6^{\circ}42'$ de plus, ils compteraient 2 signes $6^{\circ}42'$, et ils écriraient $2^{s}6^{\circ}42'$.

Les marins, pour les usages de la boussole, partagent la circonférence en 32 parties égales, dont chacune se nomme *air* ou *rhumb* de vent: chacune de ces parties est donc la 32e partie de 360°, c'est-à-dire qu'elle est de 11°15'; ainsi au lieu de 45°, on dit 4 airs de vent, parce que 45° font 4 fois 11°15'; pareillement, au lieu de 18°27', on dirait 1 air de vent et 7°12'.

Des Angles, et de leur mesure.

9. Deux lignes AB, AC, qui se rencontrent, peuvent former entre elles une ouverture plus ou moins grande, comme on le voit dans les *fig.* 4, 5, 6.

Cette ouverture BAC est ce qu'on appelle un *angle;* et cet angle est dit angle *rectiligne,* ou *curviligne,* ou *mixtiligne,* selon que les lignes qui le comprennent sont, ou toutes deux lignes droites, ou toutes deux lignes courbes, ou l'une une ligne droite, et l'autre une ligne courbe.

Nous ne parlons, pour le présent, que des angles rectilignes.

10. Pour se former une idée exacte d'un angle, il faut concevoir que la ligne droite AB était d'abord couchée sur AC, et qu'on l'a fait tourner sur le point A (comme une branche de compas sur sa charnière), pour l'amener dans la position AB qu'elle a actuellement. La quantité dont AB a tourné est précisément ce qu'on appelle un *angle.*

D'après cette idée, on conçoit que la grandeur d'un angle ne dépend point de celle de ses côtés; en sorte que l'angle formé par les lignes AC, AB (*fig.* 4) est absolument le même que celui que forment les lignes AF et AE, qui sont une extension de celles-là. En effet, la ligne AB et la ligne AE ont dû tourner chacune de la même quantité, pour venir dans leur position actuelle.

Le point A, où se rencontrent les deux lignes AB, AC, s'appelle le *sommet de l'angle,* et les deux lignes AB, AC en sont les côtés.

Pour désigner un angle, nous emploierons trois lettres, dont l'une marque le sommet, et les deux autres sont placées le long

des côtés; et en énonçant ces lettres, nous placerons toujours celle du sommet au milieu : ainsi, pour désigner l'angle compris par les deux lignes AB, AC, nous dirons l'angle BAC, ou CAB.

Cette attention est principalement nécessaire lorsque plusieurs angles ont leur sommet au même point; car si, dans la *fig.* 4 par exemple, on disait simplement l'angle A, on ne saurait si l'on veut parler de l'angle BAC ou de l'angle BAD; mais, lorsqu'il n'y a qu'un seul angle, comme dans la *fig.* 4*, on peut dire simplement l'angle *a*, c'est-à-dire le désigner par la lettre de son sommet.

11. Puisque l'angle BAC (*fig.* 4) n'est autre chose que la quantité dont le côté AB aurait dû tourner sur le point A, pour venir de la position AC dans la position AB; et que, dans ce mouvement, chaque point de AB, le point B par exemple, restant toujours également éloigné de A, décrit nécessairement un arc de cercle qui augmente ou diminue précisément dans le même rapport que l'angle augmente ou diminue, il est naturel de prendre cet arc pour mesure de l'angle; mais, comme chaque point de AB décrit un arc de longueur différente, ce n'est point la longueur même de l'arc qu'il faut prendre, mais le nombre de ses degrés et parties de degré, qui sera toujours le même pour chaque arc décrit par chaque point de AB, puisque tous ces points commençant, continuant et finissant leur mouvement dans le même temps, font nécessairement le même nombre de pas; toute la différence qu'il y a, c'est que les points les plus éloignés du point A font des pas plus grands. Nous pouvons donc dire que....

12. *Un angle quelconque* BAC (fig. 4) *a pour mesure le nombre des degrés et parties de degré de l'arc compris entre ses côtés, et décrit de son sommet comme centre.*

Ainsi, quand par la suite nous dirons : Un tel angle a pour mesure un tel arc, on doit entendre qu'il a pour mesure le nombre de degrés ou parties de degré de cet arc.

13. Donc, *pour diviser un angle en plusieurs parties égales,*

il ne s'agit que de diviser l'arc qui lui sert de mesure en autant de parties égales, et de tirer, par les points de division, des lignes au sommet de cet angle. Nous parlerons plus bas de la division des arcs.

14. Et, *pour faire un angle égal à un autre*, par exemple, pour faire au point *a* de la ligne *ac* (*fig.* 4*) un angle égal à l'angle BAC (*fig.* 4), il faut, d'une ouverture de compas arbitraire, et du point *a* comme centre, décrire un arc indéfini *cb*; posant ensuite la pointe du compas sur le sommet A de l'angle donné BAC, on décrira, de la même ouverture, l'arc BC compris entre les deux côtés de cet angle; et ayant pris avec le compas la distance de C à B, on la portera de *c* en *b*; ce qui donnera le point *b* par lequel et par le point *a* tirant la ligne *ab*, on aura l'angle *bac* égal à BAC.

En effet, l'angle *bac* a pour mesure *bc* (**12**), et l'angle BAC a pour mesure BC. Or, ces deux arcs sont égaux, puisque appartenant à des arcs égaux, ils ont d'ailleurs des cordes égales (**7**); car la distance de *b* à *c* a été faite la même que celle de B à C.

15. L'angle BAC (*fig.* 5) se nomme angle *droit*, lorsque l'un AB de ses côtés ne penche ni vers l'autre côté AC ni vers son prolongement AD.

On l'appelle angle *aigu* (*fig.* 4), lorsque l'un AB de ses côtés penche plus vers l'autre côté AC que vers son prolongement AD.

Enfin on l'appelle *obtus* (*fig.* 6), lorsqu'un côté AB penche plus vers le prolongement de l'autre côté AC que vers ce côté même.

16. Concluons de ce qui a été dit (**12**) sur la mesure des angles, 1°. *qu'un angle droit a pour mesure* 90°; *un angle aigu moins que* 90°, *et un angle obtus plus que* 90°.

Car si la ligne AE (*fig.* 3) ne penche ni vers AB, ni vers son prolongement AD, les deux angles BAE, DAE seront égaux; donc les arcs BF et DE, qui leur servent de mesure, seront aussi égaux ; or, ces deux arcs, composant ensemble la demi-circonference, valent ensemble 180°; donc chacun d'eux est de 90°.

donc aussi les deux angles BAE, DAE sont chacun de 90°.

D'après cela, il est évident que BAC est moindre que 90°, et BAF est plus grand que 90°.

17. 2°. *Que les deux angles* BAC, BAD (fig. 4, 5 et 6) *que forme une ligne droite* AB *tombant sur une autre droite* CD, *valent toujours ensemble* 180°. Car on peut toujours regarder le point A (*fig.* 4) comme le centre d'un cercle dont CD est alors un diamètre: or, les deux angles BAC, BAD ont pour mesure les deux arcs BC et BD qui composent la demi-circonférence; ils valent donc ensemble 180° ou autant que deux angles droits.

18. 3°. *Que si d'un même point* A (fig. 3), *on tire tant de droites* AC, AE, AF, AD, AG, etc., *qu'on voudra, tous les angles* BAC, CAE, EAF, FAD, DAG, GAB, *qu'elles comprennent, ne feront jamais que* 360°. Car ils ne peuvent occuper plus que la circonférence.

19. Deux angles, tels que BAC et BAD (*fig.* 4), qui, pris ensemble, font 180°, sont dits *suppléments* l'un de l'autre: ainsi BAC est le supplément de BAD, et BAD est le supplément de BAC; parce que l'un de ces angles est ce qu'il faudrait ajouter à l'autre pour faire 180°.

Les angles égaux auront donc des suppléments égaux; et ceux qui auront des suppléments égaux seront égaux.

20. Concluons de là *que les angles* BAC, EAD (fig. 7), *opposés au sommet, et formés par les deux droites* BA, EC, *sont égaux.*

Car BAC a pour supplément CAD, et EAD a aussi pour supplément CAD.

21. On appelle *complément* d'un angle ou d'un arc, ce dont cet arc est plus petit ou plus grand que 90°. Ainsi (*fig.* 3) l'angle BAC a pour complément CAE; l'angle BAF a pour complément FAE. Le complément est donc ce qu'il faut ajouter à un angle, ou ce qu'il faut en retrancher, pour qu'il vaille 90°.

Les angles aigus qui auront des compléments égaux seront donc égaux, et réciproquement. Il en sera de même des angles obtus.

On rencontre sans cesse les angles, tant dans la théorie que dans la pratique.

Nous aurons assez d'occasions par la suite de nous convaincre qu'on les rencontre à chaque pas dans la théorie. Quant à la pratique, nous ferons remarquer que c'est par les angles qu'on juge de la route que suit un navire ; qu'on distingue si un navire qu'on rencontre en mer a le vent sur nous, ou si nous l'avons sur lui ; c'est par les angles qu'on détermine les positions des objets les uns à l'égard des autres; c'cst en variant les angles que les voiles et le gouvernail font avec la quille, qu'on produit les différentes évolutions du navire, qu'on change sa route, et qu'on accélère ou qu'on retarde son mouvement. C'est encore par la mesure des angles qu'on parvient à déterminer en mer, en quel lieu on est.

Les instruments qui servent à mesurer les anglcs ou à former dcs angles tels qu'on le juge à propos, sont en assez grand nombre ; nous allons faire connaître les principaux.

22. L'iustrument représenté par la *fig.* 8, et qu'on appelle *rapporteur*, sert à mesurer lcs angles sur le papier, et à former sur le papier les angles dont on peut avoir besoin. L'usage en est commode et fréqueut. C'est un dcmi-cercle de cuivre ou de corne, divisé en 180°. Le centre de cet instrument est marqué par une petite échancrure C. Qnand on veut mesurer un angle tel que BAC (*fig.* 4, 5, 6, etc.), on applique le centre C sur le sommet A de l'angle qu'on veut mesurer, et le rayon CB du même instrument, sur l'un AC des côtés de cet angle ; alors le côté AB, prolongé s'il est nécessaire, fait connaître, par celle des divisions de l'instrument par laquelle il passe, de combien de degrés est l'arc du rapporteur compris entre les côtés de l'angle, et par conséquent (**12**) de combien de degrés est cet angle BAC.

Pour faire, avec le même instrument, un angle d'un nombre déterminé de degrés, on applique le rayon CB de l'in-

strument sur la ligne qui doit servir de côté à l'angle qu'on veut former, et de manière que le centre C soit sur le point où cet angle doit avoir son sommet ; puis, cherchant sur les divisions de l'instrument le nombre de degrés en question, on marque sur le papier un point en cet endroit ; par ce point et par le sommet, on tire une ligne droite, qui fait alors avec la première l'angle demandé.

23. Pour mesurer les angles sur le terrain, on emploie l'instrument représenté par la *fig.* 9 ; on le nomme *graphomètre*. C'est un demi-cercle divisé en 180°, et sur lequel on marque même les demi-degrés, selon la grandeur de son diamètre. Le diamètre DB fait corps avec l'instrument ; mais le diamètre EC, qu'on nomme *alidade*, n'y est assujetti que par le centre A, autour duquel il peut tourner et parcourir, par son extrémité C, toutes les divisions de l'instrument. Chacun de ces deux diamètres est garni à ses deux extrémités de pinnules, à travers lesquelles on regarde les objets. L'instrument est porté par un pied, et peut, sans rien changer à la position du pied, être incliné dans tous les sens, selon qu'on en a besoin.

Quand on veut mesurer l'angle que forment deux lignes droites tirées d'un point A où l'on est, à deux autres objets F et G, on place le centre du graphomètre en A, et l'on dispose l'instrument de manière que, regardant à travers les pinnules du diamètre fixe DAB, on aperçoive l'un F de ces deux objets, et qu'en même temps l'autre objet G se trouve dans le prolongement du plan de l'instrument, ce qu'on fait en inclinant plus ou moins le graphomètre ; alors on fait mouvoir l'alidade EC jusqu'à ce qu'on puisse apercevoir l'objet G à travers les pinnules E et C ; l'arc BC, compris entre les deux diamètres, est alors la mesure de l'angle FAG.

On voit aussi, d'après ce que nous venons de dire, comment on peut former sur le terrain un angle d'un nombre déterminé de degrés. On fait le plus souvent, sur la largeur et à l'extrémité du diamètre mobile, des divisions qui, selon la manière dont elles correspondent aux divisions mêmes de

l'instrument, servent à connaître les parties de degré de 5 en 5 minutes, ou de 3 en 3.

Cet instrument est aussi, le plus souvent, garni d'une *boussole* ordinaire ou simple : on la voit dans la même *fig.* 9.

L'aiguille aimantée, qui en fait la pièce principale, est soutenue en son milieu par un pivot sur lequel elle a toute la mobilité possible. Comme sa propriété est de rester constamment dans une même position, ou d'y revenir quand elle en a été écartée (au moins dans un même lieu, et pendant un assez long intervalle de temps), on l'emploie utilement sur ces sortes d'instruments, pour déterminer la position des objets à l'égard des points cardinaux, ou à l'égard de la ligne nord et sud, avec laquelle elle fait toujours le même angle dans un même lieu. Sur le bord de la cavité qui renferme l'aiguille, on marque communément les 360° de la circonférence. Quand on tourne l'instrument, l'aiguille, par la propriété qu'elle a de revenir dans une même situation, marque, par la nouvelle division à laquelle elle répond, de combien de degrés l'instrument a tourné.

On emploie aussi la boussole ordinaire sans le graphomètre; mais c'est seulement pour déterminer grossièrement les points de détail d'un plan ou d'une carte, dont les points principaux ont été fixés avec exactitude, de la manière que nous l'exposerons par la suite.

24. La *boussole marine,* ou le *compas de mer,* ou encore le *compas de variation* (*fig.* 10), ne diffère guère de la boussole ordinaire que par une suspension qui lui est propre, et qui a pour objet de faire que les parties de cette machine, qui servent à la mesure des angles, ne participent à d'autres mouvements du vaisseau qu'à ceux qu'il peut avoir pour tourner horizontalement. Lorsqu'elle n'est employée qu'à connaître la direction de la quille du vaisseau, on l'appelle *compas de route.* Elle est renfermée dans une espèce d'armoire qu'on appelle *habitacle,* et qui est située dans le sens de la largeur du vaisseau. L'aiguille n'est pas isolée sur son pivot, comme dans la boussole ordinaire; elle serait trop sujette à

vaciller; on la charge d'un morceau de talc taillé en rond, et collé entre deux morceaux de papier, et l'on trace dessus la rose des vents, c'est-à-dire qu'on en partage la circonférence en rhumbs de vent. On conçoit donc que si le vaisseau vient à tourner d'une certaine quantité, comme l'aiguille reste toujours ou revient toujours à la même situation, elle ne répondra plus au même point que l'habitacle: en observant donc quel est le rhumb de vent qui répond à celui qu'occupait d'abord l'aiguille, on connaîtra de combien le vaisseau a tourné. On pourra donc s'en servir pour ramener et retenir constamment le vaisseau dans une même direction.

Quand on emploie la boussole à *relever* les objets, c'est-à-dire à reconnaître l'*air de vent* auquel ils répondent, on l'appelle *compas de variation;* ce nom lui vient d'un autre usage dont ce n'est pas ici le lieu de parler. Alors on la garnit de deux pinnules A et B (*fig.* 10), par lesquelles on vise aux objets dont on veut connaître la situation. En mer, il faut deux observateurs; l'un qui tourne et ajuste le compas de variation de manière à apercevoir l'objet; et, pendant ce temps, l'autre observe quelle est la position de l'aiguille à l'égard de la ligne DE, qui est un fil tendu à angles droits sur la ligne qu'on conçoit passer par A et B.

Des Perpendiculaires et des Obliques.

25. Nous avons dit (15) que la ligne AB (*fig.* 5), qui ne penche ni vers AC ni vers AD, formait avec ces deux parties des angles qu'on appelle *droits.*

Cette même ligne AB est aussi ce qu'on appelle *une perpendiculaire* à la ligne AC, ou DC, ou AD.

D'après cette définition, on doit regarder comme vérités évidentes les trois propositions suivantes:

26. 1°. *Quand une ligne* AB (fig. 11) *est perpendiculaire sur une autre ligne* CD, *celle-ci est aussi perpendiculaire sur la ligne* AB.

Car, lorsque AB est perpendiculaire sur CD, les angles AEC, AED sont égaux: or, AED est égal à BEC (**20**); donc AEC est

égal à BEC; donc la ligne CE ou CD ne penche ni vers AE ni vers BE; donc elle est perpendiculaire à AB.

27. 2°. *D'un même point* E, *pris sur une ligne* CD, *on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire à cette ligne.*

28. 3°. *Et d'un même point* A, *pris hors d'une ligne* CD, *on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire à cette ligne.*

Car on conçoit qu'il n'y a qu'un seul cas où une ligne, passant par le point E ou par le point A, puisse ne pencher ni vers ED ni vers EC.

29. *Les lignes qui, partant du point* A, *s'écarteront également de la perpendiculaire, seront égales; et plus ces lignes s'écarteront de la perpendiculaire, plus elles seront longues, et par conséquent la perpendiculaire est la plus courte de toutes.*

Supposons que EG soit égale à EF; si l'on renverse la figure AEG sur la figure AEF, la ligne AE restant commune à toutes les deux, il est clair qu'à cause de l'angle AEG égal à AEF, la ligne EG s'appliquera sur EF, et que le point G tombera sur le point E, puisque EG est supposée égale à EF; donc AG s'appliquera exactement sur AF; donc ces deux lignes sont égales.

Quant à la seconde partie de la proportion, il est évident que le point C de la ligne CE, étant supposé plus loin de AB que le point F de la même ligne CE, est nécessairement plus éloigné de tel point de AB qu'on voudra, que le point F ne peut l'être du même point; donc AC est plus grand que AF; donc aussi la perpendiculaire est la plus courte de toutes.

30. Les lignes AF, AC, AG sont dites *obliques* à l'égard de la perpendiculaire AE et de la ligne CD; et, en général, une ligne est oblique à une autre, quand elle fait avec cette autre un angle aigu ou obtus.

31. Puisque (**29**) les obliques AF, AG sont égales, lorsqu'elles s'éloignent également de la perpendiculaire, il faut en conclure que, *lorsqu'une ligne est perpendiculaire sur le milieu* E *d'une autre ligne* FG, *chacun de ses points est autant éloigné de l'extrémité* F *que de l'extrémité* G; car il est évident que ce qu'on



a dit du point A s'applique également à tout autre point de la ligne AE ou AB.

32. Il n'est pas moins évident *qu'il n'y a que les points de la perpendiculaire* AE *sur le milieu de* FG *qui puissent être également éloignés de* F *et de* G; car tout point qui sera à droite ou à gauche de la perpendiculaire est évidemment plus près de l'un de ces points que de l'autre.

Donc, pour qu'une ligne soit perpendiculaire sur une autre, il suffit qu'elle passe par deux points dont chacun soit également éloigné de deux points pris dans cette autre.

33. Concluons de là, 1°. *que pour élever une perpendiculaire sur le milieu d'une ligne* AB (fig. 12), il faut poser une pointe de compas en B, et, d'une ouverture plus grande que la moitié de AB, tracer un arc IK; poser ensuite la pointe du compas en A, et, de la même ouverture, tracer un arc LM qui coupe le premier au point C, qui sera également éloigné de A et de B. On déterminera ensuite, de la même manière, un autre point D, soit au-dessous, soit au-dessus de AB, en prenant la même ou une autre ouverture de compas. Enfin on tirera, par les deux points C et D, la ligne CD qui (32) sera perpendiculaire sur le milieu de AB.

34. 2°. *Que si d'un point* E, *pris hors de la ligne* AB (fig. 13), *on veut mener une perpendiculaire à cette ligne,* on placera la pointe du compas en E, et, d'une ouverture plus grande que la plus courte distance à la ligne AB, on tracera, avec l'autre pointe, deux petits arcs qui coupent AB aux points C et D; puis, de ces deux points comme centres, et d'une ouverture de compas plus grande que la moitié de CD, on tracera deux arcs qui se coupent en un point E, par lequel, et par le point E, on tirera la ligne EF, qui sera perpendiculaire sur AB (32), puisqu'elle aura deux points E et F également éloignés, chacun, des deux points C et D de la ligne AB.

35. Si le point E, par lequel on veut que la perpendiculaire

passe, était sur la même ligne AB, on opérerait encore de la même manière. (Voyez *fig.* 14.)

Enfin, si le point E était tellement placé qu'on ne pût marquer commodément qu'un des deux points C ou D, on prolongerait la ligne AB, et l'on opérerait encore de même (Voyez *fig.* 15 et 16). La *fig.* 16 est pour le cas où l'on veut élever une perpendiculaire à l'extrémité de la ligne AB.

Des Parallèles.

36. Deux lignes droites, tracées sur un même plan, sont dites *parallèles*, lorsqu'elles ne peuvent jamais se rencontrer, à quelque distance qu'on les imagine prolongées.

Deux lignes parallèles ne font donc point d'angle entre elles.

Donc deux parallèles sont partout également éloignées l'une de l'autre; car il est évident que si en quelque endroit elles se trouvaient plus près qu'en un autre, elles seraient inclinées l'une à l'autre, et par conséquent elles pourraient enfin se rencontrer.

D'après ces notions, il est aisé d'établir les cinq propositions suivantes.

37. 1°. *Lorsque deux lignes parallèles* AB *et* CD (fig. 17) *sont coupées par une troisième ligne* EF (*qu'on appelle alors* sécante), *les angles* BGE, DHE *ou* AGH, CHF, *qu'elles forment d'un même côté avec cette ligne, sont égaux.* Car les lignes AB et CD, n'ayant aucune inclinaison entre elles (36), doivent nécessairement être également inclinées d'un même côté, chacune à l'égard de toute ligne à laquelle on les comparera.

38. 2°. *Les angles* AGH, GHD *sont égaux.* Car on vient de voir que AGH est égal à CHF: or, CHF (20) est égal à GHD; donc AGH est égal à GHD.

39. 3°. *Les angles* BGE, CHF *sont égaux.* Car BGE est égal à AGH (20); or, on a vu (37) que AGH est égal à CHF; donc BGE est égal à CHF.



40. 4°. *Les angles* BGH, DHG, *ou* AGH, CHG, *sont supplément l'un de l'autre;* car BGD est supplément de BGE, qui (37) est égal à DGH.

41. 5°. *Les angles* BGE, DHF, *ou* AGE, CHF, *sont supplément l'un de l'autre;* car DHF a pour supplément DGH, qui (37) est égal à BGE.

42. Chacune de ces cinq propriétés a toujours lieu, lorsque deux lignes parallèles sont rencontrées par une troisième; et réciproquement, *toutes les fois que deux lignes droites auront dans leur rencontre avec une troisième l'une quelconque de ces cinq propriétés, on doit conclure qu'elles sont parallèles.* Cela se démontre d'une manière absolument semblable.

On a donné aux angles dont nous venons d'examiner les propriétés, des noms qui peuvent servir à fixer ces propriétés dans la mémoire. Les angles BGE, FHC se nomment *alternes-externes,* parce qu'ils sont de différents côtés de la ligne EF, et qu'ils sont tous deux hors des parallèles. Les angles AGH, GHD s'appellent *alternes-internes,* parce qu'ils sont de différents côtés de la ligne EF, et tous deux entre les parallèles. Les angles BGH, DHG s'appellent *internes d'un même côté,* parce qu'ils sont entre les parallèles, et d'un même côté de la sécante EF. Enfin, les angles BGE, DHF se nomment *externes d'un même côté,* parce qu'ils sont hors des parallèles, et d'un même côté de la sécante.

43. Des propriétés que nous venons de démontrer, on peut conclure, 1°. *Que si deux angles* ABC, DEF (fig. 18), *tournés d'un même côté, ont leurs côtés parallèles, ils seront égaux.* Car si l'on imagine le côté DE prolongé jusqu'à ce qu'il rencontre BC en G, les angles ABC, DGC seront égaux (37); et, par la même raison, l'angle DGC sera égal à l'angle DEF; donc ABC est égal à DEF.

44. 2°. *Que pour mener par un point donné* C *une ligne* CD (fig. 19) *parallèle à une ligne* AB, il faut, par le point C, tirer arbitrairement la ligne indéfinie CEF, qui coupe AB en un point quelconque E; mener, selon ce qui a été enseigné (14),

par le point C, la ligne CD, qui fasse avec CE l'angle ECD égal à l'angle FEB que celle-ci fait avec AB : la ligne CD, tirée de cette manière, sera parallèle à AB (37).

Au reste, chacune des cinq propriétés établies ci-dessus peut fournir une manière de mener une parallèle.

45. Les perpendiculaires et les parallèles, dont nous venons de parler successivement, sont d'un usage très-fréquent dans toutes les parties pratiques des mathématiques. Les perpendiculaires sont nécessaires dans la mesure des surfaces et des solidités ou capacités des corps ; elles reviennent à chaque pas dans toutes les opérations de l'architecture navale. Comme l'angle droit est facile à construire, on fait, autant qu'on le peut, dépendre la construction des figures plutôt des perpendiculaires que de toute autre ligne.

Les parallèles, outre leur grand usage dans la théorie pour démontrer facilement un grand nombre de propositions, sont la base de plusieurs opérations utiles. On les emploie beaucoup dans le pilotage, principalement pour marquer, sur les cartes marines, la route qu'a tenue un vaisseau pendant sa navigation ; ce qu'on appelle *pointer* ou *faire le point*. Nous en dirons un mot par la suite.

Des Lignes droites considérées par rapport à la circonférence du cercle ; et des Circonférences de cercles considérées les unes à l'égard des autres.

46. La courbure uniforme du cercle met en droit de conclure, sans qu'il soit besoin d'en donner une démonstration rigoureuse,

1°. *Qu'une ligne droite ne peut rencontrer une circonférence en plus de deux points ;*

2°. *Que, dans un même demi-cercle, la plus grande corde soutend toujours le plus grand arc, et réciproquement.*

On appelle, en général, *sécante* (*fig.* 20) toute ligne, comme DE, qui rencontre le cercle en deux points, et qui est en partie

au dehors ; et l'on appelle *tangente* celle qui ne fait que s'appliquer contre la circonférence; telle est AB.

47. *Une tangente ne peut rencontrer la circonférence qu'en un seul point.* Car, si elle la rencontrait en deux points, elle entrerait dans le cercle, puisque de ces deux points il serait possible de tirer au centre deux rayons ou lignes égales, entre lesquelles on peut toujours concevoir une perpendiculaire sur la ligne qui joint ces deux points; et comme cette perpendiculaire (29) est plus courte que chacun des deux rayons, on voit que la tangente aurait des points plus près du centre que ceux où elle rencontre le cercle; elle entrerait donc dans le cercle : ce qui est contre la définition que nous venons d'en donner.

La tangente n'ayant qu'un point de commun avec le cercle, il s'ensuit que le rayon CA (*fig.* 21), qui va au point d'attouchement, est la plus courte ligne qu'on puisse tirer du centre à la tangente ; que, par conséquent (29), il est perpendiculaire à la tangente. Donc, réciproquement, la *tangente en un point quelconque* A *du cercle est perpendiculaire à l'extrémité du rayon* CA *qui passe par ce point.*

48. On voit donc que, *pour mener une tangente en un point donné* A *sur le cercle,* il faut tirer à ce point un rayon CA, et mener à son extrémité une perpendiculaire, suivant la méthode donnée (35).

49. Donc, *si plusieurs cercles* (fig. 22) *ont leurs centres sur la même ligne droite* CA, *et passent tous par le même point* A, *ils auront tous pour tangente commune la ligne* TG *perpendiculaire à* CA, *et se toucheront par conséquent tous.*

50. Ainsi, *pour décrire un cercle d'une grandeur déterminée et qui touche un cercle donné* BAD (fig. 23) *en un point donné* A, il faut, par le centre C et par le point A, tirer le rayon CA qu'on prolongera indéfiniment; puis, du point A, vers T ou vers V (selon qu'on voudra que l'un des cercles embrasse l'autre ou ne l'embrasse point), porter la grandeur du rayon du second cercle; après quoi, du centre T ou V, et du rayon TA ou VA, on décrira la circonférence EF.

31. *La perpendiculaire élevée sur le milieu d'une corde passe toujours par le centre du cercle, et par le milieu de l'arc sous-tendu par cette corde* (fig. 24).

Car elle doit passer par tous les points également éloignés des extrémités A et B (32); or, il est évident que le centre est également éloigné des deux extrémités A et B qui sont deux points de la circonférence; donc elle passe par le centre.

Il n'est pas moins évident qu'elle doit passer par le milieu de l'arc; car, si E est le milieu de l'arc, les arcs égaux AE, BE ayant des cordes égales (7), le point E est également éloigné de A et de B; donc la perpendiculaire doit passer par le point E.

32. Le centre, le milieu de l'arc et le milieu de la corde, étant tous trois sur une même ligne droite, toutes les fois qu'une ligne droite passera par deux de ces trois points, on pourra conclure qu'elle passe par le troisième.

Et comme on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire sur le milieu de la corde, on doit encore conclure que, si une perpendiculaire sur une corde passe par l'un quelconque de ces trois points, elle passe nécessairement par les deux autres.

33. De ces propriétés on peut conclure, 1°. *Le moyen de diviser un angle ou un arc en deux parties égales.*

Pour diviser l'angle BAC (*fig.* 25) en deux parties égales, on décrira de son sommet A comme centre, et d'un rayon arbitraire, l'arc DE; puis des points D et E pris successivement pour centres, et d'un même rayon, on tracera deux arcs qui se coupent en un point G, par lequel et par le point A on tirera AG, qui (32), étant perpendiculaire sur le milieu de la corde DE, divisera en deux parties égales l'arc DIE (31), et par conséquent aussi l'angle BAC, puisque les deux angles partiels BAG, CAG ont (12) pour mesure les arcs égaux DI, EI.

34. 2°. *Le moyen de faire passer une circonférence de cercle par trois points donnés qui ne soient pas en ligne droite.*

Soient A, B, C (*fig.* 26) ces trois points; en tirant les lignes droites AB, BC, elles seront deux cordes du cercle qu'il s'agit de décrire.

Élevez une perpendiculaire (35) sur le milieu de AB; faites la même chose sur le milieu de BC; le point I, où se couperont ces deux perpendiculaires, sera le centre; car ce centre doit être sur DE (51), et, par la même raison, il doit être sur FG; il doit donc être à leur rencontre I, qui est le seul point commun qu'aient ces deux lignes.

55. S'il était question de *retrouver le centre d'un cercle ou d'un arc déjà décrit*, on voit donc qu'il n'y aurait qu'à marquer trois points à volonté sur cet arc, et opérer comme on vient de l'enseigner.

56. Puisqu'on ne trouve qu'un seul point I qui satisfasse à la question, il faut en conclure que par trois points donnés on ne peut faire passer qu'un seul cercle, et par conséquent, que *deux circonférences de cercle ne peuvent se rencontrer en trois points sans se confondre.*

57. 3°. *Le moyen de faire passer par un point donné* B (fig. 27 et 28) *une circonférence de cercle qui en touche une autre dans un point donné* A.

Il faut, par le centre C de la circonférence donnée, et par le point A où l'on veut qu'elle soit touchée, tirer le rayon CA qu'on prolongera de part ou d'autre, selon qu'il sera nécessaire; joindre le point A au point B, par lequel on veut que passe la circonférence cherchée, et élever sur le milieu de AB une perpendiculaire MN, qui coupera AC, ou son prolongement, en D. Ce point D sera le centre, et AD ou BD sera le rayon du cercle demandé; car, puisque la circonférence qu'on veut décrire doit passer par le point A et par le point B, son centre doit être sur MN (15); d'ailleurs, puisque cette même circonférence doit toucher l'autre en A, son centre doit être sur CA (49) ou sur son prolongement; il est donc au point d'intersection de CA et de MN.

58. Si, au lieu d'une circonférence, c'était une ligne droite

qu'il s'agit de faire toucher en un point donné A (*fig.* 29), d'un cercle passant par un point donné B, l'opération serait la même, avec cette seule différence que la ligne AC serait une perpendiculaire élevée au point A sur cette droite.

59. *Deux cordes parallèles* AB, CD (fig. 30), *interceptent entre elles des arcs égaux* AC, BD.

Car la perpendiculaire GI, qu'on abaisserait du centre G sur AB, doit (51) diviser en deux parties égales chacun des deux arcs AIB, CID, puisqu'elle sera en même temps perpendiculaire sur AB, et sur sa parallèle CD; donc, si des arcs égaux AI, DI on retranche les arcs égaux CI, DI, les arcs restants AC, BD doivent être égaux.

Concluons de là que, quand une tangente HK est parallèle à une corde AB, le point d'attouchement I est précisément au milieu de l'arc AIB.

60. Les propositions que nous avons établies (50, 57 et 58) ont leur application dans l'architecture navale ou la construction des navires; il y est souvent question d'arcs qui doivent se toucher ou toucher des lignes droites, et passer par des points donnés. Ce que nous avons dit peut faciliter l'intelligence de quelques-unes des méthodes qu'on y prescrit. L'architecture civile fait aussi, assez souvent, usage d'arcs qui se touchent.

61. La dernière proposition que nous venons de démontrer peut, entre autres usages, servir à mener une parallèle à une ligne donnée.

Des Angles considérés dans le cercle.

62. Nous avons vu ci-dessus (12) quelle est, en général, la mesure des angles. Ce que nous proposons ici n'est point de donner une nouvelle manière de les mesurer, mais d'établir quelques propriétés qui peuvent nous être fort utiles par la suite, tant pour exécuter certaines opérations que pour faciliter quelques démonstrations.

63. *Un angle* MAN (fig. 31 et 32), *qui a son sommet à la*



circonférence, et qui est formé par deux cordes ou par une tangente et par une corde, a toujours pour mesure la moitié de l'arc BFED *compris entre ces côtés.*

Menez, par le centre C, le diamètre FH parallèle au côté AM, et le diamètre GE parallèle au côté AN; l'angle MAN (43) est égal à l'angle FCE; il aura donc la même mesure que celui-ci qui a son sommet au centre, c'est-à-dire qu'il aura pour mesure l'arc FE: il ne s'agit donc que de faire voir que l'arc FE est la moitié de l'arc BFED. Or, BF est égal à AH (59), à cause des parallèles AM, HF; et à cause des parallèles AN et GE, l'arc ED est égal à AG: donc ED plus BF valent AG plus AH, c'est-à-dire GH; mais GH, comme mesure de l'angle GCH, doit être égal à FE, mesure de l'angle FCE qui (20) est égal à GCH; donc BF plus ED valent FE; donc FE est la moitié de BFED; donc l'angle MAN a pour mesure la moitié de l'arc BFED qu'il comprend entre ses côtés.

Cette démonstration suppose que le centre soit entre les côtés de l'angle, ou sur l'un des côtés; mais si le centre était hors des côtés, comme il arrive pour l'angle MAL (*fig.* 33), il n'en serait pas moins vrai que cet angle aurait pour mesure la moitié de l'arc BL compris entre ses côtés. Car, en imaginant la tangente AN, l'angle BAL vaut LAN moins MAN; il a donc pour mesure la différence des mesures de ces deux angles, c'est-à-dire (puisque le centre est entre leurs côtés) la moitié de LEA moins la moitié de BEA, ou la moitié de BL.

64. Donc, 1°. *tous les angles* BAE, BCE, BDE (fig. 33), *qui, ayant leur sommet à la circonférence, comprendront entre leurs côtés le même arc ou des arcs égaux, seront égaux.* Car ils auront chacun pour mesure la moitié du même arc BE (63).

65. 2°. *Tout angle* BAC (fig. 34) *qui aura son sommet à la circonférence, et dont les côtés passeront par les extrémités d'un diamètre, sera droit ou de* 90°. Car il comprendra alors entre ses côtés la demi-circonférence BOC, qui est de 180°, et comme il doit en avoir la moitié pour mesure (63), il sera donc de 90°.

66. La proposition qu'on vient de démontrer (65) peut, entre plusieurs autres usages, avoir les deux suivants:

67. 1°. *Pour élever une perpendiculaire à l'extrémité* B *d'une ligne* FB (fig. 35), lorsqu'on ne peut prolonger assez cette ligne pour exécuter commodément ce qui a été enseigné (55), voici le procédé :

D'un point D pris à volonté hors de la ligne FB, et d'une ouverture égale à la distance DB, décrivez la circonférence ABCH qui coupe FB eu quelque point A; par ce point et par le centre D, tirez le diamètre ADC; du point C, où ce diamètre coupe la circonféreuce, menez au point B la ligne CB; elle sera perpendiculaire à FB; car l'angle CBA qu'elle forme avec FB a son sommet à la circonférence, et ses côtés passent par les extrémités du diamètre AC; cet angle est donc droit (65); donc CB est perpendiculaire sur FB.

68. 2°. *Pour mener d'un point donné* E (fig. 56), *hors du cercle* ABD, *une tangente à la circonférence de ce cercle.* Joignez le centre C et le point E par la droite CE; décrivez sur CE, comme diamètre, la circonférence CAED; elle coupera la circonférence ABD en deux points A et D, par chacun desquels et par le point E, tirant les lignes DE et AE, vous aurez les deux tangentes qu'on peut mener du point E à la circonférence ABD.

Pour se convaincre que ces lignes sont tangentes, il n'y a qu'à tirer les rayons CD et CA; les deux angles CDE, CAE ont chacun leur sommet à la circonférence ACDE, et les deux côtés de chacun passent par les extrémités du diamètre CE: donc (65) ces angles sont droits; donc DE et AE sont perpendiculaires à l'extrémité des rayons CD et CA; donc (47) ces lignes sont tangentes en D et en A.

69. Si l'on prolonge le côté BA (*fig.* 31) indéfiniment vers I, on aura un angle NAI, qui aura aussi son sommet à la circonférence; cet angle, qui n'est point formé par deux cordes, mais seulement par une corde et par le prolongement d'une autre corde, n'aura point pour mesure la moitié de l'arc AD compris entre ses côtés, mais la moitié de la somme des deux arcs

AD et AB soutendus par le côté AD et par le côté AI prolongé; car, DAI valant avec DAB deux angles droits, ces deux angles doivent avoir ensemble pour mesure la moitié de la circonférence: or, on vient de voir (65) que DAB avait pour mesure la moitié de DB; donc DAI a pour mesure la moitié de AD et la moitié de AB.

70. *Un angle* BAC (fig. 37), *qui a son sommet entre le centre et la circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc* BC *compris entre ses côtés, plus la moitié de l'arc* BE *compris entre ces mêmes côtés prolongés.*

Du point D, où CA prolongé rencontre la circonférence, tirez DF parallèle à AB; l'angle BAC est égal à FDC (37), et aura par conséquent la même mesure que celui-ci, c'est-à-dire la moitié de l'arc FBC (65), ou la moitié de BC plus la moitié de BF, ou (à cause que (59) BF est égal à DE), la moitié de BC plus la moitié de DE.

71. *Un angle* BAC (fig. 38), *qui a son sommet hors du cercle, a pour mesure la moitié de l'arc concave* BC *moins la moitié de l'arc convexe* ED *compris entre ses côtés.*

Du point D, où CA rencontre la circonférence, tirez DF parallèle à AB.

L'angle BAC est égal à FDC (37); il aura donc la même mesure que celui-ci, c'est-à-dire la moitié de CF, ou la moitié de CB moins la moitié de BF, ou (à cause que BF est (59) égal à ED) la moitié de CB moins la moitié de ED.

72. On voit donc que quand les côtés d'un angle interceptent un arc de circonférence, si cet angle a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés, il a nécessairement son sommet à la circonférence; car, s'il l'avait ailleurs, les propositions démontrées (70 et 71) feraient voir qu'il n'a point la moitié de cet arc pour mesure. Donc, de quelque façon qu'on pose un même angle, si ces côtés (*fig.* 33) passent toujours par les mêmes points B et E de la circonférence, son sommet sera toujours sur quelque point de la circonférence. Donc, si deux règles AM, AN (*fig.* 39), fixement attachées l'un à l'autre, roulent

ensemble dans un même plan, en touchant continuellement deux points fixes B et C, le sommet A décrira la circonférence d'un cercle qui passera par les deux points B et C.

Ceci peut servir, 1°. *à décrire un cercle qui passe par trois points donnés* B, A, C (fig. 39), *lorsqu'on ne peut approcher du centre*. Il faudra joindre le point A aux deux points B et C, par deux règles AM, AN; fixer ces deux règles de manière qu'elles ne puissent s'écarter l'une de l'autre; alors, en faisant mouvoir l'angle BAC de manière que les règles AM, AN touchent toujours les points B et C, le sommet A décrira la circonférence demandée.

2°. *A décrire un arc de cercle d'un nombre de degrés proposé, et qui passe par deux points donnés* B *et* C, ce qui peut être nécessaire dans la pratique.

Pour cet effet, on retranchera de 360° le nombre des degrés que cet arc doit avoir, et, ayant pris la moitié du reste, on ouvrira les deux règles de manière qu'elles fassent un angle égal à cette moitié. Fixant alors les deux règles l'une à l'autre, et les faisant tourner autour de deux pointes fixées en B et C, l'arc BAC, que le sommet décrira dans ce mouvement, sera du nombre de degrés proposé.

« Il est facile de voir pourquoi l'on fait l'angle BAC égal à la moitié du reste; c'est qu'il a pour mesure la moitié de BC, qui est la différence entre la circonférence entière et l'arc ACB. »

Des Lignes droites qui renferment un espace.

73. Le moindre nombre de lignes droites qu'on puisse employer pour renfermer un espace, est trois; et alors cet espace se nomme *triangle rectiligne*, ou simplement *triangle*. ABC (*fig.* 40) est un triangle, parce que c'est un espace renfermé par trois lignes droites, ou plus exactement, parce que c'est une figure qui n'a que trois angles.

Il est évident que, dans tout triangle, la somme de deux côtés pris comme on le voudra est toujours plus grande que le troisième. AB plus BC, par exemple, valent plus que AC, parce

que AC étant la ligne droite qui va de A à C, est le plus court chemin pour aller d'un de ces points à l'autre.

Un triangle dont les trois côtés sont égaux, se nomme triangle *équilatéral* (*fig.* 41).

Celui dont les deux côtés seulement sont égaux, se nomme triangle *isocèle* (*fig.* 42).

Et celui dont les trois côtés sont inégaux, se nomme triangle *scalène* (*fig.* 40).

74. *La somme des trois angles d'un triangle rectiligne vaut deux angles droits, ou* 180°.

Prolongez indéfiniment le côté AC vers E (*fig.* 40), et concevez la ligne CD parallèle au côté AB.

L'angle BAC est égal à l'angle DCE (57), puisque les lignes AB et CD sont parallèles. L'angle ABC est égal à l'angle BCD par la seconde propriété des parallèles (58) : donc les deux angles BAC et ABC valent ensemble autant que les deux angles BCD et DCE, c'est-à-dire autant que l'angle BCE; mais BCE est supplément (17 et 19) de BCA ; donc les deux angles BAC et ABC forment ensemble un supplément de BCA ; donc ces trois angles valent ensemble 180°.

75. La démonstration que nous venons de donner prouve donc en même temps que *l'angle extérieur* BCE *d'un triangle* ABC *vaut la somme des deux intérieurs* BAC *et* ABC *qui lui sont opposés.*

Concluons de ce qu'on vient de dire (74), 1°. *Qu'un triangle rectiligne ne peut avoir qu'un seul angle qui soit droit;* et alors on l'appelle triangle *rectangle* (*fig.* 43).

2°. Qu'à plus forte raison *il ne peut avoir qu'un seul angle qui soit obtus;* dans ce cas, on l'appelle triangle *obtusangle* (*fig.* 44).

3°. Mais *il peut avoir tous les angles aigus;* et alors il est dit triangle *acutangle* (*fig.* 45).

4°. Que, *connaissant deux angles ou seulement la somme de deux angles d'un triangle, on connaît le troisième angle,* en retranchant de 180° la somme des deux angles connus.

5°. Que *lorsque deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième angle de chacun est nécessairement égal*, puisque les trois angles de chaque triangle valent 180°.

6°. Que *les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont toujours complément* (21) *l'un de l'autre;* car, dès que l'un des angles du triangle est de 90°, il ne reste plus que 90° pour les deux autres ensemble.

76. Nous avons vu ci-dessus (54) qu'on pouvait faire passer une circonférence de cercle toujours par trois points qui ne sont pas en ligne droite; concluons-en que l'*on peut toujours faire passer une circonférence de cercle par les sommets des trois angles d'un triangle.* On appelle cela *circonscrire* un cercle à un triangle.

77. De là il est aisé de conclure, 1°. *que si deux angles d'un triangle sont égaux, les côtés qui leur sont opposés seront aussi égaux;* et réciproquement, *si deux côtés d'un triangle sont égaux, les angles opposés à ces côtés seront égaux.*

Car, en faisant passer une circonférence par les trois angles A, B, C (*fig.* 46), si les angles ABC, ACB sont égaux, les arcs ADC, AEB, dont les moitiés leur servent de mesure (63), seront nécessairement égaux: donc (7) les cordes AC, AB seront égales; et réciproquement, si les côtés AC, AB sont égaux, les arcs ADC, AEB seront égaux; donc les angles ABC, ACB, qui ont pour mesure la moitié de ces arcs, seront égaux.

Donc les trois angles d'un triangle équilatéral sont égaux, et valent, par conséquent, chacun le tiers de 180° ou 60°.

78. 2°. *Dans un même triangle* ABC (fig. 47), *le plus grand côté est opposé au plus grand angle, le plus petit côté au plus petit angle, et réciproquement.*

Car, si l'angle ABC est plus grand que l'angle ACB, l'arc AC sera plus grand que l'arc AB, et par conséquent la corde AC plus grande que la corde AE. La réciproque se démontre de même.

De l'égalité des Triangles.

79. Il y a plusieurs propositions dont la démonstration est fondée sur l'égalité de certains triangles qu'on y considère; il est donc à propos d'établir ici les caractères auxquels on peut reconnaître cette égalité. Ils sont au nombre de trois.

80. *Deux triangles sont égaux quand ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.*

Que l'angle B du triangle BAC (*fig.* 48) soit égal à l'angle E du triangle EDF (*fig.* 49); que le côté AB soit égal au côté DE, et le côté BC égal au côté EF; voici comment on peut se convaincre que ces deux triangles sont égaux.

Concevez la figure ABC appliquée sur la figure DEF, de manière que le côté AB soit exactement appliqué sur son égal DE; puisque l'angle B est égal à l'angle E, le côté BC tombera sur EF, et le point C tombera sur le point F, puisque BC est supposé égal à EF. Le point A étant sur D et le point C sur F, il est donc évident que AC s'applique exactement sur DE, et que par conséquent les deux triangles conviennent parfaitement.

Donc, pour construire un triangle dont on connaîtrait deux côtés et l'angle compris, on tirera (*fig.* 49) une ligne DE égale à l'un des côtés connus: sur cette ligne on fera (**14**) un angle DEF égal à l'angle connu, et, ayant fait EF égal au second côté connu, on tirera DF; ce qui achèvera le triangle demandé.

81. *Deux triangles sont égaux quand ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.*

Que le côté AB (*fig.* 48) soit égal au côté DE (*fig.* 49), l'angle B égal à l'angle E, et l'angle A égal à l'angle D.

Concevez le côté AB appliqué exactement sur le côté DE; BC se couchera sur EF, puisque l'angle B est égal à l'angle E; pareillement, puisque l'angle A est égal à l'angle D, le côté AC se couchera sur DF: donc AC et BC se rencontrent au point F; donc les deux triangles sont égaux.

Donc, pour construire un triangle dont on connaîtrait un

côté et les deux angles adjacents, on tirera (*fig.* 49) une ligne DE égale au côté connu; aux extrémités de cette ligne, on fera (14) les angles E et D égaux aux deux angles connus; alors les côtés EF, DF de ces angles termineront par leur rencontre le triangle demandé.

82. La proposition (81) peut servir à démontrer que *les parties* AB, CD (fig. 50) *de deux parallèles interceptées entre deux autres parallèles* AB, CD, *sont égales.*

Abaissez les deux perpendiculaires AE, BF; les angles AEC, BFD sont égaux, puisqu'ils sont droits; et à cause des parallèles AC et BD, AE et BF, l'angle EAC est égal à l'angle FBD (43). D'ailleurs AE est égal à BF (36); donc les deux triangles AEC, BFD sont égaux, puisqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; donc AC est égal à BD.

On démontrera de même que, si AC est égal et parallèle à BD, AB sera égal et parallèle à CD; car, outre le côté AC égal à BD, et l'angle droit en E ainsi qu'en F, l'angle ACE sera égal à BDF, puisque AC est parallèle à BD (37); donc (75) le troisième angle EAC sera égal au troisième angle DBF; donc les deux triangles auront un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; donc ils seront égaux; donc AE est égal à BF, et par conséquent les deux lignes sont parallèles; or, de là et de ce qu'on vient de démontrer (82), il s'ensuit que AB est égal à CD.

83. *Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.*

Que le côté AB (*fig.* 48) soit égal au côté DE (*fig.* 49), le côté BC égal au côté EF, et le côté AC égal au côté DF.

Concevez le côté AB exactement appliqué sur DE, et le plan BAC couché sur le plan de la figure DEF, je dis que le point C tombe sur le point F.

Décrivez des points D et E comme centres, et des rayons DF et EF, les deux arcs IK et HG qui se coupent en F; il est évident que le point C doit tomber sur quelque point de IK, puisque AC est égal à EF; par une semblable raison, le point

C doit tomber sur quelque point de GH, puisque BC est égal à EF; il doit donc tomber sur le point F, qui est le seul point commun que ces deux arcs puissent avoir d'un même côté de DE; donc les deux triangles conviennent parfaitement, et sont par conséquent égaux.

Donc, pour construire un triangle dont on connaîtrait les trois côtés, il faut (*fig.* 49) tirer une droite DE égale à l'un des côtés connus; du point D comme centre, et d'un rayon égal au second côté connu, décrire l'arc IK; pareillement, du point E comme centre, et d'un rayon égal au troisième côté connu, décrire l'arc GH; enfin, du point d'intersection F, tirer aux points D et E les droites FD et FE.

Des Polygones.

84. Une figure de plusieurs côtés s'appelle, en général, *un polygone.*

Lorsqu'elle a 3 côtés, on l'appelle	*triangle* ou *trilatère;*
lorsqu'elle en a 4,	*quadrilatère,*
5,	*pentagone;*
6,	*hexagone;*
7,	*eptagone;*
8,	*octogone;*
9,	*ennéagone;*
10,	*décagone.*

Nous n'étendons pas davantage la liste de ces noms, parce qu'une figure est aussi bien désignée en énonçant le nombre de ses côtés, qu'en employant ces différents noms, dont le grand nombre chargerait assez inutilement la mémoire; nous n'exposons ceux-ci que parce qu'ils se rencontrent plus fréquemment que les autres.

On appelle angle *saillant* celui dont le sommet est hors de la figure; la *fig.* 5 a tous ses angles saillants.

L'angle *rentrant* est, au contraire, celui dont le sommet entre dans la figure; l'angle CDE (*fig.* 52) est un angle rentrant.

On appelle *diagonale* une ligne tirée d'un angle à un autre

dans une figure quelconque; AD, AC (*fig.* 51) sont des diagonales.

85. *Tout polygone peut être partagé, par des diagonales menées d'un de ses angles, en autant de triangles moins deux qu'il a de côtés.*

L'inspection des *fig.* 51 et 52 suffit pour faire sentir que cela est vrai généralement.

86. Donc, *pour avoir la somme de tous les angles intérieurs d'un polygone quelconque, il faut prendre* 180° *autant de fois moins deux qu'il y a de côtés.*

Car il est évident que la somme des angles intérieurs des polygones ABCDE (*fig.* 51) et ABCDEF (*fig.* 52) est la même que celle des angles des triangles ABC, ACD, etc. Or, la somme des trois angles de chacun de ces triangles est de 180°; il faut donc prendre 180° autant de fois qu'il y a de triangles, c'est-à-dire (85) autant de fois moins deux qu'il y a de côtés.

Remarque. Dans la *fig.* 52, l'angle CDE, pour être compris dans la proposition précédente, doit être compté, non pas pour la partie CDE extérieure au polygone, mais pour la partie CDE composée des angles ADE, ADC; c'est un angle de plus de 180°, et qu'on ne doit pas moins considérer comme un angle, que tout autre angle au-dessous de 180°; car un angle n'est, en général (10), que la quantité dont une ligne a tourné autour d'un point fixe; et soit qu'elle tourne de plus ou de moins que 180°, la quantité dont elle a tourné est toujours un angle.

87. *Si l'on prolonge dans le même sens tous les côtés d'un polygone qui n'a point d'angles rentrants, la somme de tous les angles extérieurs vaudra* 360°, *quelque nombre de côtés qu'ait le polygone.* (Voir *fig.* 51.)

Car chaque angle extérieur est le supplément de l'angle intérieur qui lui est contigu; ainsi les angles tant intérieurs qu'extérieurs valent autant de fois 180° qu'il y a de côtés; mais (86) les intérieurs ne diffèrent de cette somme que de deux fois 180° ou 360°; il reste donc 360° pour les angles extérieurs.

88. On appelle polygone régulier celui qui a tous ses angles égaux et tous ses côtés égaux. (Voyez *fig.* 53.)

Il est donc toujours facile de savoir combien vaut chaque angle intérieur d'un polygone régulier; car, ayant trouvé par la proposition enseignée (86) combien valent ensemble tous les angles intérieurs, il n'y aura qu'à diviser cette valeur totale par le nombre des côtés. Par exemple, si l'on demande combien vaut chaque angle intérieur d'un pentagone régulier; comme il y a 5 côtés, je prends 180° cinq fois moins deux, c'est-à-dire 3 fois ; ce qui donne 540° pour la valeur des cinq angles intérieurs : donc, puisqu'ils sont tous égaux, chacun doit valoir la cinquième partie de 540°, c'est-à-dire 108°.

89. De la définition du polygone régulier, il suit qu'*on peut toujours faire passer une même circonférence de cercle par tous les angles d'un polygone régulier.*

Car il est prouvé (84) qu'on peut faire passer une circonférence de cercle par les trois points A, B, C (*fig.* 53); or, je dis qu'elle passe aussi par l'extrémité du côté CD. En effet, il est facile de prouver que le point D, où cette circonférence doit rencontrer le côté CD, est éloigné de C d'une quantité égale à BC; car l'angle ABC étant égal à BCD, les arcs AEC, BFD, dont les moitiés servent de mesure à ces angles (65), doivent être égaux : retranchant de chacun l'arc commun AFED, les arcs restants CD et AB doivent être égaux; donc aussi (7) les cordes CD et AB sont égales; donc le point D, où le côté CD est rencontré par la circonférence qui passe par A, B, C, est le même que le sommet de l'angle du polygone. On démontrera la même chose des angles E et F.

90. On voit donc que, *pour circonscrire un cercle à un polygone régulier, la question se réduit à faire passer un cercle par les sommets de trois de ses angles;* ce qui se fait de la manière enseignée (64).

91. *Toutes les perpendiculaires abaissées du centre d'un polygone régulier sur les côtés sont égales.* Car ces perpendiculaires OH, OL devant tomber sur le milieu de chaque

côté (82), les lignes AH et AL seront égales ; or, AO est commun aux deux triangles OHA et OLA ; d'ailleurs, à cause des triangles ABO, AOF, qui ont tous leurs côtés égaux chacun à chacun, les angles OAH, OAL sont égaux : donc les deux triangles OAH, OAL qui ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, sont égaux (80); donc OH est égal à OL.

Donc, si d'un rayon égal à l'une de ces perpendiculaires on décrit une circonférence, elle touchera tous les côtés. Cette circonférence est dite *inscrite* au polygone.

Les perpendiculaires OH, OL s'appellent, chacune, l'*apothème* du polygone.

92. Il est clair que, si du centre du polygone régulier on tire des lignes à tous les angles, ces lignes comprendront entre elles des angles égaux, puisque ces angles auront pour mesure des arcs qui sont soutendus par des cordes égales : donc, *pour avoir l'angle au centre d'un polygone régulier, il faut diviser 360° par le nombre des côtés;* car ces angles égaux ont tous ensemble pour mesure la circonférence entière. Par exemple, pour l'hexagone, chaque angle au centre sera la sixième partie de 360°, c'est-à-dire sera de 60°.

93. Donc, *le côté de l'hexagone est égal au rayon du cercle circonscrit.* Car, en tirant les rayons AO et BO, le triangle AOB sera isocèle, et par conséquent (77) les deux angles BAO et ABO seront égaux : or, comme l'angle AOB est de 60°, les deux autres doivent valoir ensemble 120° (78); donc chacun d'eux est de 60°; les trois angles sont donc égaux, et par conséquent le triangle est équilatéral (77); donc AB est égal au rayon AO.

94. Nous n'en dirons pas davantage sur les polygones réguliers, dont les autres propriétés sont d'ailleurs très-faciles à déduire de celles qu'on vient d'exposer ; la seule chose que nous ajouterons, est l'usage de la dernière proposition pour la division de la circonférence, de 15 en 15 degrés.

On tirera deux diamètres AB, DE (*fig.* 54) perpendiculaires

l'un à l'autre, et, ayant pris une ouverture de compas égale au rayon CE, on la portera successivement de E en F, et de A en G; le quart de la circonférence AE sera, par ce moyen, divisé en trois parties égales AF, FG, GE; car, puisqu'on a pris le rayon pour l'ouverture du compas, il suit de ce qui vient d'être dit (93), que l'arc EF est de 60°. Or, EA est de 90°: donc AF est de 30°. Par la même raison, AG est de 60°; et comme AE est de 90°, GE est donc de 30°; enfin, si de l'arc total AE de 90°, vous retranchez les arcs AF et GE qui valent ensemble 60°, l'arc restant FG sera de 30°. Ayant ainsi divisé le quart de circonférence en arcs de 30°, il sera facile d'avoir l'arc de 15°, en divisant en deux parties égales chacun des arcs AF, FG, GE par la méthode donnée (83). On fera les mêmes opérations sur chacun des trois autres quarts AD, DB et BE.

Si l'on voulait conduire cette division jusqu'à l'arc de 1°, il faudrait y aller par tâtonnement; car il n'y a pas de méthode géométrique pour cela. Il y a cependant une méthode géométrique pour venir directement jusqu'à l'arc de 3°; mais, comme les propositions qui y conduisent ne peuvent nous être d'aucune autre utilité, nous n'en parlerons point.

Remarquons seulement que ce que nous entendons ici par opérations géométriques, ce sont celles dans lesquelles la chose dont il s'agit peut être exécutée par un nombre *déterminé* d'opérations faites avec la règle et le compas seuls.

Des Lignes proportionnelles.

95. Avant que d'entrer en matière sur ce qui regarde les lignes proportionnelles, nous placerons ici quelques propositions sur les proportions, qui sont une suite immédiate de ce que nous avons enseigné dans l'Arithmétique. Mais, pour abréger le discours, nous conviendrons, pour l'avenir, que lorsque deux quantités devront être ajoutées l'une à l'autre, nous indiquerons cette opération par ce signe +, qui équivaudra au mot *plus;* ainsi $4+3$ signifiera 4 plus 3, ou 4 ajouté à 3, ou 3 ajouté à 4. Pareillement, pour marquer la soustrac-

tion, nous nous servirons de ce signe —, qui équivaudra au mot *moins;* ainsi 5 — 2 signifiera 5 moins 2, ou qu'on doit retrancher 2 de 5. Comme il n'est pas toujours question de faire réellement les opérations, mais de raisonner sur des circonstances de ces opérations, il est souvent plus utile de les représenter que d'en donner le résultat.

Pour marquer la multiplication, nous nous servirons de ce signe $\times$, qui équivaudra à ces mots *multiplié par;* ainsi 5×4 signfiera 5 multiplié par 4.

Et pour marquer la division, nous ferons comme en Arithmétique : nous écrirons le dividende et le diviseur en forme de fraction, dont le dividende sera numérateur, et le diviseur, dénominateur; ainsi $\frac{12}{7}$ marquera 12 divisé par 7.

Cela posé, nous avons vu (*Arith.*, **185**) que, dans toute proportion, la somme des antécédents est à la somme des conséquents, comme un antécédent est à son conséquent; et qu'il en est de même de la différence des antécédents comparée à celle des conséquents.

96. Nous pouvons donc conclure de là que, *dans toute proportion, la somme des antécédents est à la somme des conséquents, comme la différence des antécédents est à la différence des conséquents ;* car, puisque dans la proportion $48 : 16 :: 12 : 4$, par exemple, on a (*Arith.*, **185**)

$$48 + 12 : 16 + 4 :: 12 : 4,$$

et

$$48 - 12 : 16 - 4 :: 12 : 4,$$

il est évident (à cause du rapport commun de $12 : 4$) qu'on peut conclure $48+12 : 16+4 :: 48-12 : 16-4$. Le raisonnement est le même pour toute autre proportion.

97. On peut donc, en mettant dans cette dernière proportion le troisième terme à la place du second, et le second à la place du troisième, ce qui est permis (*Arith.*, **182**), dire aussi que *la somme des antécédents est à leur différence,* comme la somme des conséquents est à leur différence.

98. Si, dans la proportion $48 : 16 :: 12 : 4$, on échange



les places des deux moyens, ce qui donnera $48 : 12 :: 16 : 4$, et qu'on applique à celle-ci la proposition qu'on vient de démontrer (96), on aura $48 + 16 : 12 + 4 :: 48 - 16 : 12 - 4$, qui, à l'égard de la proportion $48 : 16 :: 12 : 4$, fournit cette proposition : *La somme des deux premiers termes d'une proportion est à la somme des deux derniers termes, comme la différence des deux premiers est à la différence des deux derniers;* ou (en mettant le troisième terme à la place du second, et le second à la place du troisième) *la somme des deux premiers termes est à leur différence, comme la somme des deux derniers est à leur différence.*

99. *Si un rapport est composé du produit de plusieurs autres rapports, on peut, à chacun des rapports composants, substituer un rapport exprimé par d'autres termes, pourvu que ces deux termes aient le même rapport que ceux auxquels on les substituera.*

Par exemple, dans le rapport de $6 \times 10 : 2 \times 5$, on peut, au lieu des facteurs 6 et 2, substituer 3 et 1, ce qui donnera le rapport composé $3 \times 10 : 1 \times 5$, qui est le même que le rapport $6 \times 10 : 2 \times 5$. En effet, puisque $6 : 2 :: 3 : 1$, on peut, sans changer cette proportion (*Arith.*, 183), multiplier les antécédents par 10, et les conséquents par 5, et alors on aura $6 \times 10 : 2 \times 5 :: 3 \times 10 : 1 \times 5$.

Il est facile de voir que ce raisonnement s'applique à tout autre rapport.

100. Si deux ou un plus grand nombre de proportions sont telles, que dans le premier rapport de l'une, l'antécédent se trouve égal au conséquent de l'autre, on pourra, lorsqu'il s'agira de multiplier ces proportions par ordre, omettre les termes qui se trouveront communs d'antécédent à son conséquent; par exemple, si on a les deux proportions

$$6 : 4 :: 12 : 8,$$
$$4 : 3 :: 20 : 15,$$

on pourra conclure

$$6 : 3 :: 12 \times 20 : 8 \times 15.$$

Car, quand on admettrait le multiplicateur commun 4, le rapport de 6×4 à 4×3, qu'on aurait alors, ne différerait pas du rapport de 6 à 3 (*Arith.*, **170**) que l'on a en omettant ce facteur.

De même, si l'on a

$$6 : 4 :: 12 : 8,$$
$$4 : 3 :: 20 : 15,$$
$$3 : 7 :: 21 : 49,$$

on en conclura

$$6 : 7 :: 12 \times 20 \times 21 : 8 \times 15 \times 49.$$

La même chose aura lieu pour les seconds rapports, et par la même raison.

Cette observation est utile pour trouver le rapport de deux quantités, lorsque ce rapport doit être composé, parce qu'alors on compare chacune de ces quantités à d'autres quantités qu'on emploie comme auxiliaires, et qui ne doivent plus rester après la démonstration.

Nous allons maintenant transporter aux lignes les connaissances que nous avons tirées des nombres, sur les proportions. Mais pour rendre nos démonstrations plus courtes et plus générales, nous ne donnerons aucune valeur particulière à ces lignes, sinon dans quelques applications : au reste, on peut toujours s'aider par des comparaisons avec des nombres.

Les rapports que nous considérons ici sont les rapports géométriques. Ainsi, quand nous dirons : Une telle ligne est à une telle ligne, comme 5 est à 4 par exemple, on doit entendre que la première contient la seconde autant que 5 contient 4.

101. *Si sur un des côtés* AZ *d'un angle quelconque* ZAX (fig. 55), *on marque les parties égales* AB, BC, CD, DE, etc., *de telle grandeur et en tel nombre qu'on voudra; et si, après avoir tiré à volonté, par l'un* F *des points de division, la ligne* FL *qui rencontre le côté* AX *en* L, *on mène par les autres points de division les lignes* BG, CH, DI, EK, etc., *paral-*

lèles à FL; *je dis que les parties* AG, GH, HI, etc., *du côté* AX, *seront aussi égales entre elles.*

Menons par les points G, H, I, etc., les lignes GM, HN, IO, etc., parallèles à AZ; les triangles ABG, GMH, HNI, IOK, etc., seront tous égaux entre eux; car, 1° les lignes GM, HN, IO, etc., sont, chacune, égales à AB, puisque (82) elles sont égales à BC, CD, DE, etc.; 2° les angles GMH, HNI, IOK, etc., sont tous égaux entre eux, puisqu'ils sont tous égaux à l'angle ABG (45); 3° les angles MGH, NHI, OIK, etc., sont tous égaux entre eux, puisqu'ils sont tous égaux à l'angle BAG (45).

Tous les triangles BAG, MGH, NHI, etc., ont donc un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; ils sont donc tous égaux; donc les côtés AG, GH, HI, etc., de ces triangles, sont tous égaux entre eux; donc la ligne AX est, en effet, divisée en parties égales par les parallèles.

Il est donc évident que si AB est telle partie que ce soit de AG, BC sera une semblable partie de GH; CD sera une semblable partie de HI; si, par exemple, AB est les deux tiers de AG, BC sera les deux tiers de GH, et ainsi de suite.

Il en sera de même de 2, 3, 4, etc., parties de AF comparées à 2, 3, 4, etc., parties de AL: donc une portion quelconque AD ou DF de la ligne AF est même partie de la portion correspondante AI ou IL de la ligne AL, que AB l'est de AG; c'est-à-dire que

$$AD : AI :: AB : AG,$$

et

$$DF : IL :: AB : AG.$$

On peut dire de même que AF : AL :: AB : AG.

Donc (à cause du rapport de AB : AG commun à ces trois proportions) on peut dire que

$$AD : AI :: DF : IL,$$

et

$$AD : AI :: AF : AL.$$

102. Donc, *si par un point* D (fig. 56) *pris à volonté sur un des côtés* AF *d'un triangle* AFL, *on mène une ligne* DI *paral-*

lèle au côté FL, *les deux côtés* AF, AL *seront coupés proportionnellement;* c'est-à-dire qu'on aura toujours

AD : AI :: DF : IL,

et AD : AI :: AF : AL;

ou bien, en échangeant les places des deux moyens (*Arith.*, **182**),

AD : DF :: AI : IL,

et AD : AF :: AI : AL,

quel que soit d'ailleurs l'angle FAL.

103. Donc, 1°. *Si d'un point* A *pris à volonté hors de la ligne* GL (fig. 57), *on tire à différents points de cette ligne, plusieurs lignes* AG, AH, AI, AK, AL, *toute parallèle* BF *à la ligne* GL *coupera toutes ces lignes en parties proportionnelles*, c'est-à-dire qu'on aura

AB : BG :: AC : CH :: AD : DI :: AE : EK :: AF : FL,
et AB : AG :: AC : AH :: AD : AI :: AE : AK :: AF : AL.

Car, en considérant successivement les angles GAH, GAI, GAK, GAL, comme on a fait l'angle FAL dans la *fig.* 56, on démontrera de la même manière que tous ces rapports sont égaux.

104. 2°. *La ligne* AD (fig. 56*), *qui divise en deux parties égales un angle* BAC *d'un triangle, coupe le côté opposé* BC *en deux parties* BD, DC *proportionnelles aux côtés correspondants* AB, AC; c'est-à-dire de manière qu'on a BD:DC::AB:AC.

Car, si par le point B on mène BE parallèle à AD, et qui rencontre CA prolongée en E, les lignes CE, CB étant alors coupées proportionnellement (**102**), on aura BD:CD::AE:AC.

Or, il est facile de voir que AE est égale à AB; car, à cause des parallèles AD et BE, l'angle E est égal à l'angle DAC (**57**), et l'angle EBA est égal à son alterne BAD (**38**) : donc, puisque DAC et BAD sont égaux comme étant les moitiés de BAC, les angles E et EBA seront égaux; donc les côtés AE et AB sont aussi égaux; donc la proportion BD : CD :: AE : AC se change en celle-ci, BD:CD::AB:AC.

105. *Si l'on coupe les lignes* AF, AL (fig. 56) *proportionnellement aux points* D *et* I, *c'est-à-dire de manière que* AF:AD::AL:AI, *la ligne* DI *sera parallèle à* FL.

Car la partie de AL, qui couperait la parallèle menée du point D, doit (102) être contenue dans AL autant que AD l'est dans AF; or, par la supposition, AI est contenue dans AL précisément ce même nombre de fois: donc cette partie ne peut être autre que AI.

106. Donc, *si l'on coupe proportionnellement aux points* B, C, D, E, F (fig. 57), *les lignes* AG, AH, AI, AK, AL, *menées du point* A *à différents points de la ligne* GL, *la ligne* BCDEF, *qui passera par tous ces points, sera une ligne droite parallèle à* GL.

107. Les propositions enseignées n[os] 102 et suiv. sont également vraies lorsque la ligne BF, au lieu d'être entre le point A et la ligne GL, comme dans la *fig.* 57, tombe au delà du point A, comme dans la *fig.* 58; car tout ce qui a été dit de la *fig.* 55, et qui sert de base aux propositions établies 102 et suiv., aurait également lieu pour les parallèles qui couperaient ZA et XA prolongées, dans la *fig.* 55.

De la similitude des triangles.

108. On appelle côtés *homologues* de deux triangles, ou, en général, de deux figures semblables, ceux qui ont des positions semblables, chacun dans la figure à laquelle il appartient.

109. *Deux triangles qui ont les angles égaux chacun à chacun ont les côtés homologues proportionnels, et sont par conséquent semblables.*

Si les deux triangles ADI, AFL (*fig.* 59 et 60) sont tels que l'angle A du premier soit égal à l'angle A du second, l'angle D égal à l'angle F, et l'angle I égal à l'angle L, je dis qu'on aura AD:AF::AI:AL::DI:FL.

Car puisque l'angle A du premier est égal à l'angle A du second, on peut appliquer ces deux triangles l'un sur l'autre de la manière représentée dans la *fig.* 56; alors, puisque

l'angle D est égal à l'angle F, les lignes DI et FL seront parallèles (**82**) : donc, selon ce qui a été dit (**102**), on a AD:AF::AI:AL.

Tirons maintenant, par le point I, la droite IH parallèle à AF; selon ce qui a été dit (**102**), on voit que AI:AL::FH:FL, ou, à cause que FH est égal à DI (**82**), :: DI : FL; donc AD:AF::AI:AL::DI:FL.

Comme on peut échanger les places des moyens, on peut dire aussi AD:AI::AF:AL, et AI:DI::AF:FL.

110. Puisque (**74**), lorsque deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième angle est nécessairement égal au troisième angle, concluons-en que *deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun.*

111. On a vu (**45**) que deux angles qui ont les côtés parallèles, et qui sont tournés d'un même côté, sont égaux : donc *deux triangles qui ont les côtés parallèles ont les angles égaux chacun à chacun, et ont par conséquent* (**109**) *les côtés proportionnels.*

Donc aussi *deux triangles qui ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun ont aussi ces mêmes côtés proportionnels;* car, si l'on fait faire un quart de révolution à l'un de ces triangles, ses côtés deviendront parallèles à ceux du second.

112. *Si de l'angle droit* A *d'un triangle rectangle* BAC (fig. 43) *on abaisse une perpendiculaire* AD *sur le côté opposé* BC (*qu'on appelle* hypoténuse), 1° *les deux triangles* ADB, ADC *seront semblables entre eux et au triangle* BAC; 2° *la perpendiculaire* AD *sera moyenne proportionnelle entre les deux parties* BD *et* DC *de l'hypoténuse;* 3° *chaque côté* AB *ou* AC *de l'angle droit sera moyen proportionnel entre l'hypoténuse et le segment correspondant* BD *ou* DC.

Car les deux triangles ADB, ADC ont chacun un angle droit en D, comme le triangle BAC en a un en A; d'ailleurs, ils ont de plus chacun un angle commun avec ce même triangle BAC, puisque l'angle B appartient tout à la fois au triangle

ADB et au triangle BAC. Pareillement, l'angle C appartient tout à la fois au triangle ADC et au triangle BAC : donc (**110**) ces trois triangles sont semblables ; donc (**109**), comparant les côtés homologues des deux triangles ADB et ADC, on aura

$$BD : AD :: AD : DC;$$

comparant les côtés homologues des deux triangles ADB, BAC, on aura

$$BD : AB :: AB : BC;$$

enfin, comparant les côtés homologues des triangles ADC et BAC, on aura

$$CD : AC :: AC : BC;$$

où l'on voit que AD est (*Arith.*, **174**) moyenne proportionnelle entre BD et DC; AB moyenne proportionnelle entre BD et BC; et enfin AC moyenne proportionnelle entre CD et BC.

113. *Deux triangles qui ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels ont aussi les deux autres angles égaux, et sont par conséquent semblables.*

Si les deux triangles ADI, AFL (*fig.* 59 et 60) sont tels que l'angle A du premier soit égal à l'angle A du second, et qu'en même temps les côtés qui comprennent ces angles soient tels qu'on ait AD : AF :: AI : AL, je dis qu'ils seront semblables, c'est-à-dire qu'ils auront les autres angles égaux chacun à chacun, et leurs troisièmes côtés DI et FL en même rapport que AD et AF, ou que AI et AL.

Car on peut appliquer l'angle A du triangle ADI sur l'angle A du triangle AFL, de la manière représentée par la *fig.* 56. Or, puisqu'on suppose que AD : AF :: AI : AL, les deux droites AF et AL sont donc coupées proportionnellement aux points D et I : donc DI est parallèle à FL (**105**); donc (**37**) l'angle AFL est égal à l'angle ADI, et l'angle ALF est égal à l'angle AID.

De là, et de ce qui a été dit (**109**), il suit que DI : FL :: AD : AF :: AI : AL.

114. *Deux triangles qui ont leurs trois côtés homologues proportionnels ont les angles égaux chacun à chacun, et sont par conséquent semblables.*

Si l'on suppose (*fig.* 61 et 62) que DE : AB :: EF : BC :: DF : AC, je dis que l'angle D est égal à l'angle A, l'angle E égal à l'angle B, et l'angle F égal à l'angle C.

Imaginons qu'on ait construit sur DE un triangle DGE, dont l'angle DEG soit égal à l'angle B, et l'angle GDE à l'angle A ; le triangle DEG sera semblable au triangle ABC (**110**) : donc (**109**) DE : AB :: GE : BC :: DG : AC ; mais, par la supposition, on a DE : AB :: EF : BC :: DF : AC; donc, à cause du rapport commun de DE : AB, on aura GE : BC :: DG : AC :: EF : BC :: DF : AC; d'où l'on peut tirer ces deux proportions :

GE : BC :: EF : BC,

et DG : AC :: DF : AC.

Donc, puisque les deux conséquents sont égaux entre eux dans chacune de ces deux proportions, les antécédents seront aussi égaux entre eux ; donc GE est égal à EF, et DG égal à DF. Le triangle DEG a donc ses trois côtés égaux à ceux du triangle DEF; il est donc (85) égal à ce triangle DEF : or, on vient de voir que le triangle DEG est semblable à ABC; donc DEF est aussi semblable à ABC.

115. Nous avons prouvé ci-dessus (**111**) que, quand la ligne DI (*fig.* 56) est parallèle au côté FL, les deux triangles ADI et AFL sont semblables; comme cette vérité a lieu, de quelque grandeur que puisse être l'angle A, on doit donc conclure (*fig.* 57) que les triangles AGH, AHI, AIK, AKL sont semblables aux triangles ABC, ACD, ADE, AEE chacun à chacun, et que, par conséquent (**109**), KL : EF :: AK : AE :: KI : DE :: AI : AD :: IH : CD :: AH : AC :: GH : BC; donc, en ne tirant de cette suite de rapports que ceux qui renferment des parties des lignes GL et BF, on aura KL : EF :: KI : DE :: HI : CD :: GH : BC; c'est-à-dire que, *si d'un point* A *on*

tire à différents points d'une ligne droite GL *plusieurs autres lignes droites, ces lignes couperont toute parallèle à* GL *de la même manière qu'elles coupent* GL, *c'est-à-dire en parties qui auront entre elles les mêmes rapports que les parties correspondantes de* GL.

116. Les principes que nous venons d'exposer sont la base de toutes les parties des Mathématiques théoriques ou pratiques. Comme il importe de se rendre ces principes familiers, nous insisterons un peu sur leur usage, tant par cette vue que parce que cela nous fournira l'occasion d'expliquer plusieurs pratiques utiles.

117. La proposition enseignée (101) fournit un moyen bien naturel de diviser une ligne donnée en parties égales ou en parties qui aient entre elles des rapports donnés. Supposons que AR (*fig.* 55) soit une ligne qu'on veut diviser en deux parties qui aient entre elles un rapport donné, par exemple celui de 7 à 3; on tirera par le point A, et sous tel angle qu'on voudra, une ligne indéfinie AZ, et, ayant pris arbitrairement une ouverture de compas AB, on la portera dix fois le long de AZ. Je suppose que Q soit l'extrémité de la dernière partie, on joindra les extrémités Q et R de la ligne AQ et de la ligne donnée AR; alors, si par le point D, extrémité de la troisième division, on tire DI parallèle à QR, la ligne AR sera divisée en deux parties RI et AI, qui seront entre elles :: 7 : 3; car (101 et 102) elles sont entre elles :: DQ : AD que l'on a fait de 7 et de 3 parties.

On voit par là que si l'on voulait diviser la ligne AR en un plus grand nombre de parties, par exemple en 5 parties qui fussent entre elles comme les nombres 7, 5, 4, 3, 2, on ajouterait tous ces nombres entre eux, ce qui donnerait 21; on porterait 21 ouvertures de compas sur la ligne AZ, et l'on tirerait des parallèles à la ligne QR, par les extrémités des 7e, 5e, 4e, 3e, 2e divisions.

118. Si les rapports étaient donnés en lignes, on mettrait toutes ces lignes bout à bout sur la ligne AZ.

On voit donc ce qu'il y aurait à faire si l'on voulait diviser la ligne AB en parties égales.

Mais quand les parties de la ligne qu'on doit diviser doivent être petites, ou quand cette ligne elle-même est petite, le plus léger défaut dans les parallèles influe beaucoup sur l'égalité ou l'inégalité des parties; c'est pourquoi il ne sera pas inutile d'exposer la méthode suivante.

119. *fg* (*fig.* 63) est la ligne qu'il s'agit de diviser en parties égales, en 6 par exemple. On tirera une ligne indéfinie BC, sur laquelle on portera six fois de suite une même ouverture de compas arbitraire: soit BC la ligne qui comprend ces six parties, on décrira sur BC un triangle équilatéral BAC, en décrivant des deux points B et C comme centres, et de l'intervalle BC comme rayon, deux arcs qui se coupent en A. Sur les côtés AB, AC, on prendra les parties AF, AG égales chacune à *fg*; et ayant tiré FG, cette ligne sera égale à *fg*; on mènera, du point A à tous les points de division de BC, des lignes droites qui couperont FG de la même manière que BC est coupée.

Car les lignes AF, AG étant égales entre elles, et les lignes AB, AC aussi égales entre elles, on a AB : AF :: AC : AG; donc AB, AC sont coupées proportionnellement en F et G; donc FG est parallèle à BC, et par conséquent (111) le triangle FAG est semblable à ABC; donc FAG est équilatéral; donc FG est égal à AF, et par conséquent à *fg* : de plus, FG étant parallèle à BC, ces deux lignes (115) doivent être coupées proportionnellement par les lignes menées du point A à la droite BC.

Ce que nous venons d'exposer peut servir à former et à diviser l'échelle qui doit servir lorsqu'on veut réduire une figure du grand au petit; mais l'échelle la plus commode, dans un grand nombre d'opérations, est celle qu'on appelle échelle de *dixme:* voici comment elle se construit. Aux extrémités A et B de la ligne AB (*fig.* 64) qu'on veut diviser en 100 parties, on élève les perpendiculaires AC, BD, sur chacune desquelles on porte dix ouvertures de compas égales entre elles,

mais de grandeur arbitraire. Ayant tiré CD, on divise AB en 10 parties, et l'on porte ces parties sur CD; après quoi on tire des transversales, comme on le voit dans la figure, et par les points de division correspondants de CA et de BD, on tire des lignes droites qui sont autant de parallèles à AB : alors on est dans le même cas que si l'on avait divisé AB en 100 parties. Si l'on veut, par exemple, avoir 47 parties, dont AB en contient 100, je prends sur la ligne qui passe au n° 7, la partie 7H, depuis CA jusqu'à la transversale qui passe par le n° 40, et ainsi pour tout autre nombre.

En effet, à cause des triangles semblables $C7v$, CAx, il est évident que $7v$ contient 7 parties, dont Ax en contiendrait 10; donc, puisque vH contient 4 intervalles égaux à Ax, la ligne entière 7H vaut 47 parties, dont Ax en contiendrait 10, c'est-à-dire 47 parties, dont AB en contiendrait 100.

120. La proposition démontrée (**102**) peut servir à *trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données ab*, *cd*, *ef* (fig. 56), c'est-à-dire une ligne qui soit le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers seraient *ab*, *cd*, *ef*. Pour cet effet, après avoir tiré deux droites indéfinies AF, AL qui fassent entre elles tel angle qu'on voudra, on portera *ab* de A en D, et *cd* de A en F; on portera pareillement *ef* de A en I; et ayant joint les deux points D et I par la droite DI, on mènera par le point F la ligne FL parallèle à DI qui déterminera AL pour la quatrième proportionnelle cherchée.

On peut aussi, en vertu de la proposition enseignée (**109**), s'y prendre de cette autre manière. Prendre sur une ligne indéfinie AF (*fig.* 56) les deux parties AD, AF égales à *ab*, *cd*, respectivement; et ayant tiré DI égale à *ef*, et sous tel angle qu'on voudra, on tirera, par le point A et le point I, la droite AIL, que l'on coupera par une ligne FL parallèle à DI : cette parallèle sera le quatrième terme cherché.

Quand les deux termes moyens d'une proportion sont égaux, le quatrième terme s'appelle alors troisième *proportionnel*, parce qu'il n'y a que trois quantités différentes dans la pro-

portion. Ainsi, quand on demande une troisième proportionnelle à deux lignes données, il faut entendre qu'on demande le quatrième terme d'une proportion dans laquelle la seconde des deux lignes données fait l'office des deux moyens, et l'opération est la même que celle qu'on vient d'enseigner.

121. Les propositions enseignées (**109**, **113** et **114**) peuvent servir à résoudre ce problème général : *Étant données trois des six choses* (angles et côtés) *qui entrent dans un triangle, trouver les trois autres, pourvu que parmi les trois choses connues il y ait un côté.*

Nous allons en donner quelques exemples.

Supposons qu'étant au point B (*fig.* 65) dans la campagne, on veut savoir quelle distance il y a de ce point B à un objet A dont on ne peut approcher.

On plantera un piquet à une certaine distance BC que l'on mesurera, et qu'on fera à peu près égale à BA estimée grossièrement; puis, avec le graphomètre que nous avons décrit (**23**), on mesurera les angles ABC, ACB que font avec la ligne BC les deux lignes qu'on imaginera aller de ses extrémités au point A. Cela posé, on tirera sur le papier une ligne *bc* (*fig.* 66) qu'on fera d'autant de parties d'une échelle que l'on construira arbitrairement, d'autant de parties, dis-je, qu'on a trouvé de pieds dans BC, si l'on a mesuré en pieds ; et avec le rapporteur décrit (**22**), on fera au point *b* un angle qui ait autant de degrés qu'on en a trouvé à l'angle B, et au point *c* un angle qui ait autant de degrés qu'on en a trouvé à l'angle C; alors les deux lignes *ab*, *ac* se rencontreront en un point *a* qui représentera le point A ; en sorte que si vous mesurez *ab* sur votre échelle, le nombre de parties que vous lui trouverez sera le nombre de pieds que contient AB. Car les deux angles *b* et *c* ayant été faits égaux aux deux angles B et C, le triangle *bac* est semblable au triangle BAC (**110**), et par conséquent leurs côtés sont proportionnels.

C'est ainsi qu'on peut mesurer la distance d'une île à une côte, lorsqu'on peut observer cette île de deux points de cette côte, dont la distance serait connue.

122. Par la proposition démontrée (114), on peut se dispenser de mesurer les angles, dans le cas dont nous venons de parler. En effet, il suffit, après avoir planté un piquet en un point E (*fig.* 65), qui soit sur l'alignement des points A et B, et un autre en un point F qui soit sur l'alignement des deux points A et C; il suffit, dis-je, de mesurer les lignes BC, BE, CE, BF et CF; alors on fera un triangle *bec* (*fig.* 66) dont les côtés *bc*, *be*, *ce* aient autant de parties d'une même échelle, que BC, BE, CE ont de pieds; on fera de même sur *bc* un autre triangle *bcf* dont les côtés *bf*, *cf* aient autant de parties de l'échelle, que BF et CF ont de pieds; alors, prolongeant les côtés *be* et *cf*, ils se rencontreront en un point *a*, qui représentera le point A; en sorte que, mesurant *ba* sur l'échelle, on jugera, par le nombre de parties qu'on trouvera, combien de pieds doit avoir AB.

En effet, le triangle *bec* ayant les côtés proportionnels à ceux du triangle BEC, ces deux triangles doivent avoir les angles égaux : donc l'angle EBC ou ABC est égal à l'angle *ebc* ou *abc*. La même raison prouve que l'angle FCB ou ABC est égal à l'angle *fcb* ou *acb* : donc les deux triangles ACB et *acb* sont semblables.

On voit en même temps que, par cette construction, on peut déterminer les angles ABC et ACB, en mesurant avec le rapporteur les angles *abc* et *acb* sur le papier.

Au reste, quoique ces expédients et beaucoup d'autres qu'on peut facilement imaginer d'après eux puissent être souvent utiles, nous ne nous y arrêterons pas plus longtemps, parce que la Trigonométrie, que nous enseignerons par la suite, nous fournira des moyens plus expéditifs et plus susceptibles de précision; car, quoique les opérations que nous venons de décrire soient rigoureusement exactes dans la théorie, elles ne donnent cependant qu'une exactitude assez bornée dans la pratique, parce que les erreurs qu'on peut commettre dans la figure *abc*, toutes petites qu'elles puissent être, peuvent influer sensiblement sur les conclusions qu'on en tire pour la figure ABC, qui est toujours incomparablement plus grande.

Des Lignes proportionnelles considérées dans le cercle.

123. Deux lignes sont dites coupées en raison *inverse* ou *réciproque*, lorsque, pour former une proportion avec les parties de ces lignes, les deux parties de l'une se trouvent être les extrêmes, et les deux parties de l'autre, les moyens de la proportion.

Et deux lignes sont dites réciproquement proportionnelles à leurs parties, lorsqu'une de ces lignes et sa partie forment les extrêmes, tandis que l'autre ligne et sa partie forment les moyens.

124. *Deux cordes* AC *et* BD (*fig.* 67) *qui se coupent dans le cercle, en quelque point* E *que ce soit, et sous quelque angle que ce soit, se coupent toujours en raison réciproque*, c'est-à-dire que AE:BE::DE:CE.

Car, si l'on tire les cordes AB, CD, on forme deux triangles BEA, CED qu'il est aisé de démontrer être semblables, puisque, outre l'angle BEA égal à CED (20), l'angle ABE ou ABD est égal à l'angle DCE ou DCA; car ces deux angles ont leur sommet à la circonférence, et s'appuient sur le même arc AD (65). Donc les triangles BEA et CED sont semblables (110); donc ils ont leurs côtés homologues proportionnels, c'est-à-dire que AE : BE :: DE : CE, où l'on voit que les parties de la corde AC sont les extrêmes, et les parties de la corde BD sont les moyens.

125. Puisque la proposition qu'on vient de démontrer a lieu, quelque part que soit le point E, et sous quelque angle que se coupent les deux cordes AC et BD, elle a donc lieu aussi lorsque les deux cordes (*fig.* 68) sont perpendiculaires l'une à l'autre, et que l'une des deux, AC par exemple, passe par le centre : or, dans ce cas, la corde BD étant coupée en deux parties égales (51), les deux termes moyens de la proportion AE : BE :: DE : CE deviennent égaux, et la proportion se change en cette autre, AE : BE :: BE : CE; donc *toute perpendiculaire* BE, *abaissée d'un point* B *de la circonférence sur*

le diamètre, est moyenne proportionnelle entre les deux parties AE, CE *de ce diamètre.*

126. Cette proposition a plusieurs applications utiles. Nous n'en exposerons qu'une pour le présent; c'est pour *trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données* ae, ec (fig. 70).

On tirera une droite indéfinie AC, sur laquelle on placera bout à bout deux lignes AC, EC égales aux deux lignes *ae*, *ec*; et ayant décrit sur la totalité AC, comme diamètre le demi-cercle ABC, on élèvera au point de jonction E la perpendiculaire EB sur AC; cette perpendiculaire sera la moyenne proportionnelle demandée.

127. *Deux sécantes* AB, AC (fig. 69), *qui, partant d'un même point* A *hors du cercle, vont se terminer à la partie concave de la circonférence, sont toujours réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures* AD, AE, *à quelque endroit que soit le point* A *hors du cercle, et quelque angle que fassent entre elles ces deux sécantes.*

Concevez les cordes CD et BE, vous aurez deux triangles ADC, AEB, dans lesquels, 1° l'angle A est commun; 2° l'angle B est égal à l'angle C, parce que l'un et l'autre ont leur sommet à la circonférence, et embrassent le même arc DE (63): donc (**110**) ces deux triangles sont semblables, et ont par conséquent les côtés proportionnels; donc AB : AC :: AE : AD ; d'où l'on voit que la sécante AB et sa partie extérieure AD forment les extrêmes, tandis que la sécante AC et sa partie extérieure AE forment les moyens.

128. Puisque cette proposition est vraie, quel que soit l'angle BAC, si l'on conçoit que le côté AB demeurant fixe, le côté AC tourne autour du point A pour s'écarter de AB, les deux points de section E et C s'approcheront continuellement l'un de l'autre, jusqu'à ce qu'enfin la droite AC tombant sur la tangente AF, ces deux points se confondront, et AC, AE deviendront chacune égale à AF; en sorte que la proportion AB:AC::AE:AD deviendra AB:AF::AF:AD; donc

129. *Si d'un point* A, *pris hors du cercle, on mène une sécante quelconque* AB, *et une tangente* AF, *cette tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante* AB *et la partie extérieure* AD *de cette même sécante.*

130. Cette proposition peut, entre autres usages, servir à *couper une ligne en moyenne et extrême raison.* On dit qu'une ligne AB (*fig.* 71) est coupée en moyenne et extrême raison, lorsqu'elle est coupée en deux parties AB, BC, telles que l'une BC de ces parties est moyenne proportionnelle entre la ligne entière AB et l'autre partie AC, c'est-à-dire telles que l'on ait

$$AC : BC :: BC : AB.$$

Voici comment on y parvient. On élève à l'une A des extrémités une perpendiculaire AD égale à la moitié de AB : du point D comme centre, et d'un rayon égal à AD, on décrit une circonférence qui coupe en E la ligne BD qui joint les deux points B et D. Enfin on porte BE de B en C, et la ligne AB est coupée en moyenne et extrême raison au point C.

En effet, la ligne AB étant perpendiculaire sur AD, est tangente (**48**); et puisque BF est sécante, on a (**129**) BF : AB :: AB : BE ou BC; donc (*Arith.*, **185**) BF — AB : AB — BC :: AB : BC. Or, AB est égal à FE, puisque AB est double de AD; donc BF — AB est égal à BE ou BC; et comme AB — BC est égal à AC, on a donc BC : AC :: AB : BC, ou (*Arith.*, **181**) AC : BC :: BC : AB.

Des Figures semblables.

131. Deux figures d'un même nombre de côtés sont dites *semblables*, lorsqu'elles ont les angles homologues égaux, et les côtés homologues proportionnels.

Les deux figures ABCDE, *abcde* (*fig.* 72 et 73) sont semblables, si l'angle A est égal à l'angle *a*, l'angle B égal à l'angle *b*, l'angle C égal à l'angle *c*, et ainsi de suite; et si en même temps le côté AB contient le côté *ab* autant que BC contient *bc*, autant que CD contient *cd*, et ainsi de suite.

Ces deux conditions sont nécessaires à la fois dans les figures de plus de trois côtés. Il n'y a que dans les triangles où l'une de ces conditions suffise, parce qu'elle entraîne nécessairement l'autre (109 et 114).

132. *Si de deux angles homologues* A *et* a, *de deux polygones semblables, on mène des diagonales* AC, AD, ac, ad *aux autres angles, les deux polygones seront partagés en un même nombre de triangles semblables chacun à chacun.*

Car l'angle B est, par la supposition, égal à l'angle *b*, et le côté AB : *ab* :: BC : *bc* : donc les deux triangles ABC, *abc*, qui ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, sont semblables (113); donc l'angle BCA est égal à l'angle *bca*, et AC : *ac* :: BC : *bc*.

Si des angles égaux BCD, *bcd*, on ôte les angles égaux BCA, *bca*, les angles restants ACD, *acd* seront égaux. Or, BC : *bc* :: CD : *cd*; donc, puisqu'on vient de prouver que BC : *bc* :: AC : *ac*, on aura CD : *cd* :: AC : *ac*; donc les deux triangles ACD, *acd* sont aussi semblables, puisqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels. On prouvera la même chose, et de la même manière, pour les triangles ADE et *ade*, et pour tous les autres triangles qui suivraient, si ces polygones avaient un plus grand nombre de côtés.

133. *Si deux polygones* ABCDE, abcde *sont composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et semblablement disposés, ils seront semblables.*

Car les angles B et E sont égaux aux angles *b* et *e*, dès que les triangles sont semblables; et par cette même raison, les angles partiels BCA, ACD, CDA, ADE sont égaux aux angles partiels *bca*, *acd*, *cda*, *ade*; donc les angles totaux BCD, CDE sont égaux aux angles totaux *bcd*, *cde*, chacun à chacun. D'ailleurs, la similitude des triangles fournit cette suite de rapports égaux, AB : *ab* :: BC : *bc* :: AC : *ac* :: CD : *cd* :: AD : *ad* :: DE : *de* :: AE : *ae*. Ne tirant de cette suite que les rapports qui renferment les côtés des deux polygones, on a AB : *ab* :: BC : *bc* :: CD : *cd* :: DE : *de* :: AE : *ae*. Donc

ces polygones ont aussi les côtés homologues proportionnels; donc ils sont semblables.

Donc, pour construire une figure semblable à une figure proposée ABCDE (*fig.* 72), et qui ait pour côté homologue à AB une ligne donnée, on portera cette ligne donnée sur AB, de A en *f*; par le point *f*, on tirera *fg* parallèle à BC, et qui rencontre AC en *g*; par le point *g*, on mènera *gh* parallèle à CD, et qui rencontre AD en *h*; enfin, par le point *h*, on tirera *hi* parallèle à ED, et l'on aura le polygone A*fghi* semblable à ABCDE.

134. *Les contours de deux figures semblables sont entre eux comme les côtés homologues de ces figures;* c'est-à-dire que la somme des côtés de la figure ABCDE contient la somme des côtés de la figure *abcde*, autant que le côté AB contient le côté *ab*.

Car, dans la suite de rapports égaux AB : *ab* :: BC : *bc* :: CD : *cd* :: DE : *de* :: AE : *ae*, la somme des antécédents est (*Arith.*, **186**) à la somme des conséquents, comme un antécédent est à son conséquent, :: AB : *ab*; or, il est évident que ces sommes sont les contours des deux figures.

135. Si l'on conçoit la circonférence ABCDEFGH (*fig.* 74) divisée en tel nombre de parties égales qu'on voudra, et si, ayant tiré du centre I, aux points de division, des rayons IA, IB, etc., on décrit d'un autre rayon I*a* la circonférence *abcdefgh*, rencontrée par ces rayons aux points *a*, *b*, *c*, *d*, etc., il est évident que si dans chaque circonférence on joint les points de division par des cordes, on formera deux polygones semblables; car les triangles ABI, *ab*I, etc., sont semblables, puisqu'ils ont un angle commun en I compris entre deux côtés proportionnels; car IA étant égal à IB, et I*a* égal à I*b*, on a évidemment AI : BI :: *a*I : *b*I; et la même chose se démontre de même pour les autres triangles. De là et de ce qui vient d'être dit (**134**), on conclura donc que le contour ABCDEFGH est au contour *abcdefgh* :: AB : *ab*, ou (à cause des triangles semblables ABI, *ab*I) :: AI : *a*I. Comme cette similitude ne dépend point du nombre des côtés de ces deux polygones, elle

aura donc encore lieu lorsque le nombre des côtés de chacun sera multiplié à l'infini : or, dans ce cas, on conçoit qu'il n'y a plus aucune différence entre la circonférence et le polygone inscrit; donc les circonférences mêmes ABCDEFGH, *abcdefgh* seront entre elles :: AI : *a*I, c'est-à-dire comme leurs rayons, et par conséquent aussi comme leurs diamètres.

136. Concluons donc, 1°. *Qu'on peut regarder la circonférence du cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés;*

2°. *Que les cercles sont des figures semblables;*

3°. *Que les circonférences des cercles sont entre elles comme leurs rayons ou comme leurs diamètres.*

137. En général, si dans deux polygones semblables on tire deux lignes également inclinées à l'égard de deux côtés homologues, et terminées à des points semblablement placés à l'égard de ces côtés, ces lignes, qu'on appelle *lignes homologues,* seront entre elles dans le rapport de deux côtés homologues quelconques. Car, dès qu'elles font des angles égaux avec deux côtés homologues, elles feront aussi des angles égaux avec deux autres côtés homologues quelconques, puisque les angles de deux polygones semblables sont égaux chacun à chacun : or, si dans ce cas elles n'étaient pas dans le même rapport que deux côtés homologues, il est facile de sentir que les points où elles se terminent ne pourraient pas être semblablement placés comme on le suppose.

138. C'est sur les principes que nous venons de poser, concernant les figures semblables, que porte en grande partie l'art de lever les plans. Nous disons en grande partie, parce que, lorsque l'espace dont il s'agit de former le plan est d'une très-grande étendue, comme l'Europe, la France, etc., l'art d'en fixer les points principaux tient à d'autres connaissances, dont ce n'est point encore ici le lieu de parler. Mais pour les détails d'un pays, d'une côte, d'une rade, etc., on peut les déterminer et les représenter ensuite sur un plan, de la manière que nous allons décrire. Observons auparavant que nous supposons ici

que tous les angles qu'il va être question de mesurer sont tous dans un même plan horizontal, ou à peu près. S'ils n'y étaient point, il faudrait, avant de former le plan, les y réduire; nous en donnerons les moyens dans la Trigonométrie.

Supposons donc que A, B, C, D, E, F, G, H, I, K (*fig.* 75) soient plusieurs objets remarquables dont on veut représenter les positions respectives sur un plan.

On dessinera grossièrement sur un papier ces objets dans les positions qu'on leur juge à l'œil; et, pour cet effet, on se transportera aux différents lieux où il sera nécessaire, pour prendre une connaissance légère de tous ces objets. Ce premier dessin, qu'on appelle un *croquis*, servira à marquer les différentes mesures qu'on prendra dans le cours des opérations.

On mesurera une base AB, dont la longueur ne soit pas moindre que la dixième ou la neuvième partie de la distance des deux objets les plus éloignés qu'on puisse voir de ses extrémités, et qui soit telle, en même temps, que de ces mêmes extrémités on puisse apercevoir le plus grand nombre d'objets que faire se pourra; alors, avec un instrument propre à mesurer les angles, avec le graphomètre par exemple, on mesurera au point A les angles EAB, FAB, GAB, CAB, DAB, que font au point A, avec la ligne AB, les lignes qu'on imaginera menées de ce point aux objets E, F, G, C, D, que je suppose pouvoir être aperçus des extrémités A et B de la base. On mesurera de même au point B les angles EBA, FBA, GBA, CBA, DBA, que font en ce point, avec la ligne AB, les lignes qu'on imaginera menées de ce même point B aux mêmes objets que ci-dessus. S'il y a des objets, comme H, I, qu'on n'ait pas pu voir des deux extrémités A et B, on se transportera en deux des lieux E, F qu'on vient d'observer, et d'où l'on puisse voir ces deux points H et I; alors, regardant EF comme une base, on mesurera les angles HEF, IEF, HFE, IFE, que font avec cette nouvelle base les lignes qui iraient de ses extrémités aux deux objets H et I; enfin, s'il y a quelque autre objet, comme K, qu'on n'ait pu voir ni des extrémités de AB, ni de celles de EF, on prendra encore pour base quelque autre ligne, comme

FG, qui joint deux des points observés, et l'on mesurera de même à ses extrémités les angles KFG, KGF.

Toutes ces opérations faites, et après avoir déterminé et construit l'échelle du plan qu'on se propose de faire, on tirera sur ce plan une ligne *ab* qu'on fera d'autant de parties de l'échelle que l'on a trouvé de toises ou de pieds dans AB, selon qu'on aura mesuré en toises ou en pieds. On fera ensuite au point *a*, avec le rapporteur, un angle *bae* d'autant de degrés et minutes qu'on en a trouvé pour BAE, et au point *b* un angle *eba* d'autant de degrés et minutes qu'on en a trouvé à l'angle EBA ; les deux lignes *ac*, *be*, qui formeront ces angles avec *ab*, se couperont en un point *e* qui représentera sur la carte la position de l'objet E sur le terrain; car, par cette construction, le triangle *abe* sera semblable au triangle ABE, puisqu'on a fait deux angles de celui-là égaux à deux angles de celui-ci (110). On se conduira précisément de la même manière pour déterminer les points *f*, *g*, *d*, *c*, qui doivent représenter les points ou objets F, G, D, C. Pour avoir ensuite les points *h*, *i*, *k*, on tirera les lignes *ef* et *fg*, que l'on considérera comme bases, et l'on déterminera la position des points *h* et *i* à l'égard de *ef*, et du point *k* à l'égard de *fg*, de la même manière qu'on a déterminé celle des autres points à l'égard de *ab*. Bien entendu que toutes les lignes qu'on tirera dans ces différentes opérations seront tracées au crayon seulement, parce qu'elles n'ont d'autre usage que de déterminer les points *c*, *d*, *e*, etc.; lorsqu'ils sont une fois trouvés, on efface tout le reste.

Je ne m'arrête pas à démontrer en détail que les points *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *k* sont placés entre eux de la même manière que les objets C, D, E, F, G, etc., le sont entre eux; il suffit d'observer que les points *c*, *d*, *e*, *f*, *g* sont, par la construction, placés à l'égard de *ab*, comme les points C, D, E, F, G le sont à l'égard de AB, puisque les triangles *cab*, *dab*, *eab*, etc., ont été faits semblables aux triangles CAB, DAB, EAB, et disposés de la même manière; ainsi la difficulté, s'il y en a, ne peut tomber que sur les points *h*, *i* et *k*. Or, par la construction, les points *h* et *i* sont placés à l'égard de *ef*, comme les

points H et I le sont à l'égard de EF : donc, puisque ces deux dernières lignes sont placées de la même manière à l'égard des lignes *ab* et AB, les points *h* et *i* seront aussi placés à l'égard de *ab* de la même manière que H et I le sont à l'égard de AB. Ainsi les distances respectives des points *a*, *e*, *f*, *g*, etc., mesurées sur l'échelle du plan, feront connaître les distances des objets A, E, F, G, etc.

On voit assez, sans qu'il soit nécessaire d'y insister, que cette même méthode peut servir à vérifier des points que l'on soupçonnerait douteux sur une carte, ainsi qu'à y ajouter des points qu'on aurait omis.

On peut ainsi employer la boussole à déterminer la position des objets E, F, G, etc., et on l'y emploie même assez souvent; mais alors on observe au point A, non pas les angles EAB, FAB, mais les angles que les lignes AE, AF, etc., et la base même AB, font avec la direction de l'aiguille aimantée; on fait la même chose au point B, et, pour marquer les objets sur la carte, on tire par le point *a* une ligne qui représente la direction de l'aiguille aimantée, et l'on mène les lignes *ab*, *ac*, *af*, etc., de manière qu'elles fassent avec celle-là les angles qu'on a observés au point A; fixant ensuite la grandeur qu'on veut donner à *ab*, on se conduit à l'égard du point *b* de la même manière qu'on a fait à l'égard du point *a*. Quant aux autres points H et I, qui n'étaient point visibles de A et B, on les détermine, à l'égard de EF, de la même manière qu'on a déterminé les autres à l'égard de AB; enfin l'on marque ces points en *h* et *i*, en les déterminant, à l'égard de *ef*, de la même manière que les autres points *e*, *f*, etc., ont été déterminés à l'égard de *ab*. Au reste, on ne doit, autant qu'on le peut, lever ainsi à la boussole que les petits détails, comme les détours d'un chemin, les sinuosités d'une rivière, etc. Quand les points principaux ont été déterminés avec exactitude, on peut prendre ces détails avec une attention moins scrupuleuse, parce que les objets qu'on relève alors étant peu distants entre eux, l'erreur qu'on peut commettre sur les angles ne peut pas être de grande conséquence.

Lorsque quelques circonstances déterminent à marquer sur la carte déjà construite quelque nouveau point, il n'est pas indispensable d'observer ce point de deux autres points connus: on le détermine souvent, au contraire, en observant de ce point deux autres points connus; par exemple, supposons que le point H soit un point d'une rade où l'on a mesuré la profondeur à la soude, et qu'on veut marquer cette sonde sur la carte: on observera du point H les angles EHM, FHM que font avec la direction LM de l'aiguille aimantée les deux lignes EH, FH, qui vont à deux objets connus E, F; puis, pour marquer le point H sur la carte, on tirera à part (*fig.* 77) une ligne *lm* qui marque la direction de l'aiguille aimantée; et en un point *n* de cette ligne on fera les angles *onm*, *pnm* égaux aux angles EHM, FHM; enfin, par le point *f*, on mènera *fh* parallèle à *pn*, et par le point *e*, la ligne *eh* parallèle à *no*; ces deux lignes se rencontreront au point cherché *h*.

Cette même méthode sert aussi à se reconnaître en mer, à la vue de deux terres. Au reste, la rose des vents, qui est marquée sur les cartes marines, fournit des expédients pour abréger quelques-unes de ces opérations: nous ne pouvons entrer dans ces détails, qui appartiennent immédiatement au pilotage; il nous suffit d'exposer les principes sur lesquels ces différentes pratiques sont fondées.

Observons cependant qu'on ne doit déterminer les sondes de cette manière, que quand les circonstances ne permettent pas de faire autrement; car, quelque exercé que l'on puisse être à se servir du compas de variation, on ne parvient jamais à relever du point H, en mer, les objets E, F avec une précision sur laquelle on puisse autant compter que sur le relèvement qu'on ferait d'un objet H tel que serait une chaloupe, une bouée, etc., en observant des points E et F à terre. Les sondes sont assez importantes pour qu'on doive, autant qu'on le peut, employer, pour les déterminer, la méthode la plus susceptible d'exactitude.

Il y a encore une autre manière de lever qui est d'autant plus commode qu'elle exige peu d'appareil, et qu'en même

temps qu'on observe les différents points dont on veut avoir les positions, on les trace sur le plan sans les perdre de vue. L'instrument que l'on emploie à cet effet est représenté par la *fig.* 78. ABCD est une plauche de 15 à 16 pouces de long et à peu près de pareille largeur, portée sur un pied comme le graphomètre. Sur cette planche, on étend une feuille de papier qu'on arrête par le moyen d'un châssis qui entoure la planche. LM est une règle garnie de pinnules à ses deux extrémités.

Lorsqu'on veut faire usage de cet instrument, qu'on appelle *planchette*, pour tracer le plan d'une campagne, on prend une base *am*, comme daus les opérations ci-dessus; et posant le pied de l'instrument en *a*, on fait planter un piquet en *m*. On applique la règle LM sur le papier, et on la dirige de manière à voir le piquet *m* à travers les deux pinuules: alors on tire le long de la règle une ligne EF, à laquelle on donne autant de parties de l'échelle du plan qu'on aura trouvé de pieds entre le point E, d'où l'on observe d'abord, et le point *f*, d'où l'on observera à la seconde station. On fait ensuite tourner la règle autour du point E, jusqu'à ce qu'on rencontre, en regardant à travers les pinnules, quelqu'un des objets I, H, G; et à mesure qu'on en rencontre uu, on tire le long de la règle une ligne indéfinie. Ayant ainsi parcouru tous les objets qu'on peut voir lorsqu'on est en *a*, on transporte l'instrument en *m*, et on laisse un piquet en *a*; alors on fait au poiut *f* les mêmes opératious à l'égard des objets I, H, G, qu'on a faites à l'autre station. Les lignes *fi*, *fh*, *fg*, qui, dans ce second cas, vont ou sont imaginées aller à ces objets, rencontrent les premières aux points *g*, *h*, *i*, qui sont la représentation des objets G, H, I.

C'est encore sur la théorie des figures semblables qu'est fondée la méthode de faire le point, c'est-à-dire de représenter sur une carte la route qu'a tenue un vaisseau pendant sa navigation ou pendant une partie de sa navigation.

Supposons qu'un vaisseau parti d'un lieu connu ait d'abord couru 28 lieues au sud-est, puis 20 lieues au sud, et enfin



26 lieues au sud-ouest; on veut déterminer sur la carte la route qu'a tenue le vaisseau et le lieu de l'arrivée.

On cherche d'abord sur la carte le point du départ; je suppose que ce soit le point *d* (*fig.* 79). On cherche pareillement, parmi les divisions de la rose des vents marquée sur la carte, quelle est la ligne qui va au sud-est; je suppose que ce soit ici la ligne CF: on tire par le point *d* la ligne *dc* parallèle à CF, et l'on donne à *dc* autant de parties de l'échelle de la carte que l'on a couru de lieues au sud-est. Par le point *c*, on tire pareillement une ligne *cb* parallèle à la ligne CE qui est dirigée au sud, et l'on fait *cb* d'autant de parties de l'échelle qu'on a couru de lieues au sud; enfin, par le point *b*, on mène *ba* parallèle à CD, qui va au sud-ouest: et ayant fait *ba* d'autant de parties de l'échelle qu'on a couru de lieues au sud-ouest, le point *a* est le point d'arrivée, et la trace *dcba* représente la route qu'a tenue le vaisseau. En effet, les lignes *dc*, *cb*, *ba*, font entre elles les mêmes angles qu'ont faits entre elles successivement les différentes parties de la route du vaisseau; et d'ailleurs les parties *cd*, *cb*, *ba* ont entre elles les mêmes rapports que les espaces que le vaisseau a réellement décrits: donc la figure *dcba* est (131) absolument semblable à la route qu'a tenue le vaisseau. Enfin, le point *d* est situé sur la carte comme le point de départ l'est à l'égard de la terre (*); donc *dcba* est non-seulement semblable à la route du vaisseau, mais encore située, à l'égard des différents points de la carte, comme la route du vaisseau l'a été à l'égard des différents points de la terre.

(*) Cette expression n'est pas rigoureusement exacte, sans doute; mais ce n'est point ici le lieu d'en fixer le sens rigoureux. Les points d'une carte, surtout d'une carte réduite, ne sont pas situés entre eux comme les points de la terre qu'ils représentent; mais il suffit qu'ils aient le même usage. Nous reviendrons ailleurs sur cet objet.

SECTION II.

Des Surfaces.

139. Nous voici arrivés à la seconde des trois sortes d'étendue que nous avons distinguées, c'est-à-dire à l'étendue en longueur et en largeur.

Nous ne considérerons, dans cette section, que les *surfaces* ou *superficies planes;* nous nous bornerons même à celles des figures rectilignes et du cercle.

La mesure des surfaces se réduit à celle des triangles ou des quadrilatères.

On distingue les quadrilatères en *quadrilatère* simplement dit, *trapèze* et *parallélogramme.*

La figure de quatre côtés, qu'on appelle simplement *quadrilatère,* est celle parmi les côtés de laquelle il ne s'en trouve aucun qui soit parallèle à un autre. (Voyez *fig.* 80.)

Le *trapèze* est un quadrilatère dont les deux côtés seulement sont parallèles (*fig.* 81).

Le *parallélogramme* est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles (*fig.* 82, 83, 84, 85, 86, 86*); on distingue quatre sortes de parallélogrammes : le *rhomboïde,* le *rhombe,* le *rectangle* et le *carré.*

Le *rhomboïde* est le parallélogramme dont les côtés contigus et les angles sont inégaux (*fig.* 82).

Le *rhombe,* autrement dit *lozange,* est celui dont les côtés sont égaux, et les angles inégaux (*fig.* 83).

Le *rectangle* est celui dont les angles sont égaux, et les côtés contigus inégaux (*fig.* 84).

Le *carré* est celui dont les côtés et les angles sont égaux (*fig.* 85).

Quand les angles d'un quadrilatère sont égaux, ils sont nécessairement droits, parce que les quatre angles de tout quadrilatère valent ensemble quatre angles droits (86).

La perpendiculaire EF (*fig.* 82), menée entre les deux côtés opposés d'un parallélogramme, s'appelle la hauteur de ce parallélogramme; et le côté BC sur lequel tombe cette perpendiculaire, s'appelle la *base*.

La hauteur d'un triangle ABC (*fig.* 87, 88 et 89) est la perpendiculaire AD abaissée d'un angle A de ce triangle, sur le côté opposé BC, prolongé s'il est nécessaire, et ce côté BC se nomme alors la *base*.

140. *Un triangle rectiligne quelconque* ABC (fig. 89) *est toujours la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur que lui.*

Car on peut toujours concevoir tirée, par le sommet de l'angle C, une ligne CE parallèle au côté BA, et par le sommet de l'angle A, une ligne AE parallèle au côté BC, ce qui forme avec les côtés AB et BC un parallélogramme ABCE de même base et de même hauteur que le triangle ABC; cela posé, il est aisé de voir que les deux triangles ABC, CEA sont égaux; car le côté AC leur est commun. D'ailleurs, les angles BAC, ACE sont égaux, à cause des parallèles (38); et par la même raison, les angles BCA et CAE sont égaux: ces deux triangles ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, sont donc égaux; donc le triangle ABC est la moitié du parallélogramme ABCE.

141. *Les parallélogrammes* ABCD, EBCF (fig. 86 et 86*) *de même base et de même hauteur, sont égaux en surface.*

Les deux parallélogrammes ABCD, EBCF (*fig.* 86) ont une partie commune EBCD; ainsi leur égalité ne dépend que de l'égalité des triangles ABE, DCF: or, il est aisé de prouver que ces deux triangles sont égaux; car AB est égal à CD, ces lignes étant des parallèles comprises entre parallèles (82); et par la même raison, BE est égal à CF. D'ailleurs (43), l'angle ABE est égal à l'angle DCF: ces deux triangles ont donc un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; ils sont donc égaux; donc aussi le parallélogramme ABCD et le parallélogramme EBCF sont égaux.

Dans la *fig.* 86*, on démontrera de la même manière que les deux triangles ABE, DCF sont égaux : donc, retranchant de chacun le triangle DIE, les deux trapèzes restants ABID, EICF seront égaux; enfin, ajoutant à chacun de ces trapèzes le triangle BIC, le parallélogramme ABCD et le parallélogramme EBCF qui en résulteront seront égaux.

142. On peut donc dire aussi que *les triangles de même base et de même hauteur ou de bases égales et de hauteurs égales sont égaux,* puisqu'ils sont moitiés de parallélogrammes de même base et de même hauteur qu'eux (**140**).

143. De cette dernière proposition, on peut conclure que *tout polygone peut être transformé en un triangle de même surface.* Par exemple, soit ABCDE (*fig.* 91) un pentagone; si l'on tire la diagonale EC qui joigne les extrémités de deux côtés contigus ED, DC, et qu'après avoir mené DF parallèle à EC, et qui rencontre en F le côté AE prolongé, on tire CF, on aura un quadrilatère ABCF égal en surface au pentagone ABCDE; car les deux triangles ECD, ECF ont pour base commune EC; et étant de plus compris entre les mêmes parallèles EC, DF, ils sont de même hauteur; donc ils sont égaux; donc, si l'on ajoute à chacun le quadrilatère EABC, on aura le pentagone ABCDE égal au quadrilatère ABCF.

Or, de même qu'on vient de réduire le pentagone à un quadrilatère, on réduira de même le quadrilatère à un triangle; donc, etc.

De la mesure des Surfaces.

144. *Mesurer une surface,* c'est déterminer combien de fois cette surface contient une autre surface connue.

Les mesures qu'on emploie sont ordinairement des carrés; quelquefois aussi ce sont des parallélogrammes rectangles : ainsi, mesurer la surface ABCD (*fig.* 90), c'est déterminer combien elle contient de carrés tels que *abcd*, ou de rectangles tels que *abcd*; si le côté *ab* du carré *abcd* est d'un pied, c'est déterminer combien la surface ABCD contient de pieds carrés: si le côté *ab* du rectangle *abcd* étant d'un pied, le côté *bc* est

de 3 pieds, c'est déterminer combien la surface ABCD contient de rectangles de 3 pieds de long sur 1 pied de large.

Pour mesurer en parties carrées la surface du rectangle ABCD, il faut chercher combien de fois le côté AB contient le côté *ab* du carré *abcd* qui doit servir d'unité ou de mesure, chercher de même combien de fois le côté BC contient *ab*; et alors, multipliant ces deux nombres l'un par l'autre, on aura le nombre de carrés tels que *abcd*, que la surface ABCD peut renfermer. Par exemple, si AC contient *ab* quatre fois, et si BC contient *ab* sept fois, je multiplie 7 par 4, et le produit 28 marque que le rectangle ABCD contient 28 carrés tels que *abcd*.

Car, si par les points de division E, F, G, on mène des parallèles à BC, on aura quatre rectangles égaux, dont chacun pourra contenir autant de carrés tels que *abcd*, qu'il y a de parties égales à *ab* dans le côté BC: donc il faut répéter les carrés contenus dans l'un de ces rectangles autant de fois qu'il y a de rectangles, c'est-à-dire autant de fois que le côté AB contient *ab*; et comme le nombre des carrés conteuus dans chaque rectangle est le même que le nombre des parties de BC, il est donc évident qu'en multipliant le nombre des parties de BC par le nombre des parties égales de AB, on a le nombre des carrés tels que *abcd*, que le rectangle *abcd* peut renfermer.

Quoique nous ayons supposé, dans le raisonnement que nous venons de faire, que les côtés AB et BC contenaient un nombre exact de mesures *ab*, ce raisonnement ne s'étend pas moins au cas où la mesure *ab* n'y serait pas contenue exactement. Par exemple, si BC ne contenait que 6 mesures $\frac{1}{2}$, chaque rectangle ne contiendrait que 6 carrés $\frac{1}{2}$; et si le côté AB ne contenait que 3 mesures $\frac{1}{3}$, il n'y aurait que 3 rectangles $\frac{1}{3}$, chacun de 6 carrés $\frac{1}{2}$; il faudrait donc multiplier 6 $\frac{1}{2}$ par 3 $\frac{1}{3}$, c'est-à-dire le nombre des mesures de BC par le nombre des mesures de AB.

148. Puisque (**141**) le parallélogramme rectangle ABCD (*fig.* 86 et 86*) est égal au parallélogramme EBCF de même base et de même hauteur, il s'ensuit donc que, pour avoir la

surface de celui-ci, il faudra multiplier le nombre des parties de sa base BC par le nombre des parties de sa hauteur BA ; on peut donc dire, en général :

Pour avoir le nombre de mesures carrées contenues dans la surface d'un parallélogramme quelconque ABCD (fig. 82), *il faut mesurer la base* BC *et la hauteur* EF *avec une même mesure, et multiplier le nombre des mesures de la base par le nombre des mesures de la hauteur.*

On voit donc, par ce qui a été dit (**144**), que lorsqu'on veut évaluer la surface ABCD (*fig.* 90), on ne fait autre chose que répéter la surface GBCH, ou le nombre des carrés qu'elle contient, autant de fois que son côté GB est contenu dans e côté AB; ainsi le multiplicande est réellement une surface, et le multiplicateur est un nombre abstrait qui ne fait que marquer combien de fois on doit répéter ce multiplicande.

On dit cependant très-communément que, *pour avoir la surface d'un parallélogramme, il faut multiplier sa base par sa hauteur;* mais on doit regarder cela comme une expression abrégée, dans laquelle on sous-entend le *nombre* des carrés correspondants aux parties de la base, et le *nombre* des parties de la hauteur. En un mot, on ne peut pas dire qu'on multiplie une ligne par une ligne. Multiplier, c'est prendre un certain nombre de fois, de sorte que, quand on multiplie une ligne, on ne peut jamais avoir qu'une ligne; et quand on multiplie une surface, on ne peut jamais avoir qu'une surface. Une surface ne peut avoir d'autres éléments que des surfaces; et quoiqu'on dise souvent que le parallélogramme ABCD (*fig.* 82) peut être considéré comme composé d'autant de lignes égales et parallèles à BC, qu'il y a de points dans la hauteur EF, on doit sous-entendre que ces lignes ont une largeur infiniment petite (car plusieurs lignes sans largeur ne peuvent pas composer une surface); et alors chacune de ces lignes est une surface qui, étant répétée autant de fois que sa hauteur est dans la hauteur EF, donne la surface ABCD.

Nous adopterons néanmoins cette expression, *multiplier une ligne par une ligne;* mais on ne doit pas perdre de vue que ce

n'est que comme manière abrégée de parler. Ainsi nous dirons que le produit de deux lignes exprime une surface, quoique, dans le vrai, on dût dire : le *nombre* des parties d'une ligne, multiplié par le nombre des parties d'une autre ligne, exprime le nombre des parties carrées contenues dans le parallélogramme qui aurait une de ces lignes pour hauteur, et l'autre ligne pour base.

Pour marquer la surface du parallélogramme ABCD (*fig.* 82), nous écrirons $BC \times EF$; dans la *fig.* 84, nous écrirons $AB \times BC$; et dans la *fig.* 85, où les deux côtés AB et BC sont égaux, au lieu de $AB \times BC$ ou $AB \times AB$, nous écrirons $\overline{AB}^2$; de sorte que $\overline{AB}^2$ signifiera la ligne AB multipliée par elle-même, ou la surface du carré fait sur la ligne AB; de même, pour marquer que la ligne AB est élevée au cube, nous écrirons $\overline{AB}^3$, qui équivaudra à $AB \times AB \times AB$, ou $\overline{AB}^2 \times AB$.

146. Il suit de ce que nous venons de dire, que, pour que deux parallélogrammes soient égaux en surface, il suffit que le produit de la base de l'un, multipliée par la hauteur, soit égal au produit de la base du second, multipliée par la hauteur. Donc, *lorsque deux parallélogrammes sont égaux en surface, ils ont leurs bases réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs,* c'est-à-dire que la base et la hauteur de l'un peuvent être considérées comme les extrêmes d'une proportion, dont la base et la hauteur de l'autre formeront les moyens; car, en les considérant ainsi, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens : or, dans ce cas, il y a nécessairement proportion (*Arith.*, 180).

Au reste, on peut voir cette vérité immédiatement, en faisant attention que, si la base de l'un est plus petite, par exemple, que celle de l'autre, il faut que sa hauteur soit plus grande à proportion pour former le même produit.

147. Puisqu'un triangle est la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur (**140**), il suit de ce qui vient d'être dit (**145**), que *pour avoir la surface d'un triangle,*

il faut multiplier la base par la hauteur, et prendre la moitié du produit.

Ainsi, si la hauteur AD (*fig.* 87) est de 34 pieds, et la base BC de 52, la surface contiendra 884 pieds carrés; c'est la moitié du produit de 52 par 34.

Il est inutile, je pense, d'insister pour faire sentir qu'on aura le même produit en multipliant la base par la moitié de la hauteur, ou la hauteur par la moitié de la base.

148. Donc, 1°. *Pour avoir la surface du trapèze,* il faut ajouter ensemble les deux côtés parallèles, prendre la moitié de la somme, et la multiplier par la perpendiculaire menée entre ces deux parallèles; car, si l'on tire la diagonale BD (*fig.* 81), on a deux triangles ABD, BDC, dont la hauteur commune est EF. Pour avoir la surface du triangle ABD, il faudrait donc multiplier la moitié de AD par EF; et pour le triangle BDC, il faudrait multiplier la moitié de BC aussi par EF: donc la surface du trapèze vaut la moitié de AD multipliée par EF, plus la moitié de BC multipliée par EF, c'est-à-dire la moitié de la somme AD plus BC multipliée par EF.

Si par le milieu G de la ligne AB on tire GH parallèle à BC, cette ligne GH sera la moitié de la somme des deux lignes AD et BC. Car soit I le point où GH coupe la diagonale BD, les triangles BAD, BGI, semblables à cause des parallèles AD et GI, font connaître (109) que GI est moitié de AD, puisque BG est moitié de AB: or, GH étant parallèle à BC et à AD, DC (102) est coupée de la même manière que AB; on prouvera donc de même que IH est moitié de BC, en considérant les triangles semblables BDC et IDH.

Donc, et en vertu de ce qui a été dit ci-dessus, on peut dire que *la surface d'un trapèze* ABCD *est égale au produit de sa hauteur* EF, *par la ligne* GH *menée à distances égales des deux bases opposées.*

149. 2°. *Pour avoir la surface d'un polygone quelconque,* il faut le partager en triangles, par des lignes menées d'un même point à chacun de ces angles, et calculer séparément la



surface de chacun de ces triangles; en réunissant tous ces produits, on aura la surface totale du polygone. Mais pour avoir le moindre nombre de triangles qu'il soit possible, il conviendra de faire partir toutes ces lignes de l'un des angles. (V. *fig.* 92.)

150. *Si le polygone était régulier* (fig. 53); comme tous les côtés sont égaux, et que toutes les perpendiculaires menées du centre sont égales, en le concevant composé de triangles qui ont leur sommet au centre, on aurait la surface, en multipliant un des côtés par la moitié de la perpendiculaire, et multipliant ce produit par le nombre des côtés, ou, ce qui revient au même, en multipliant le contour par la moitié de la perpendiculaire.

151. Puisqu'on peut (136) considérer le cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, il faut donc conclure que, *pour avoir la surface d'un cercle, il faut multiplier la circonférence par la moitié du rayon.*

Car la perpendiculaire menée sur un des côtés ne diffère pas du rayon, lorsque le nombre des côtés est infini.

152. Puisque les circonférences des cercles sont entre elles comme les rayons ou comme les diamètres (136), il est visible que si l'on connaissait la circonférence d'un cercle d'un diamètre connu, on serait bientôt en état de déterminer la circonférence de tout autre cercle dont on connaîtrait le diamètre, puisqu'il ne s'agirait que de calculer le quatrième terme de cette proportion: *Le diamètre de la circonférence connue est à cette même circonférence, comme le diamètre de la circonférence cherchée est à cette seconde circonférence.*

On ne connaît point exactement le rapport du diamètre à la circonférence; mais on en a des valeurs assez approchées, pour qu'un rapport plus exact puisse être regardé comme absolument inutile dans la pratique.

Archimède a trouvé qu'un cercle qui aurait 7 pieds de diamètre, aurait 22 pieds de circonférence, à très-peu de chose près. Ainsi, si l'on demande quelle sera la circonférence d'un cercle qui aurait 20 pieds de diamètre, il faut chercher

(*Arith.*, 179) le quatrième terme de la proportion, dont les trois premiers sont

$$7 : 22 :: 20 :$$

Ce quatrième terme, qui est $62\frac{6}{7}$, est, à très-peu de chose près, la longueur de la circonférence d'un cercle de 20 pieds de diamètre. Je dis à très-peu de chose près; car il faudrait que le cercle n'eût pas moins de 800 pieds de diamètre, pour que la circonférence déterminée d'après le rapport de 7 à 22 fût fautive d'un pied. Au reste, en employant le rapport de 7 à 22, on peut se dispenser de faire la proportion; il suffit de tripler le diamètre, et d'ajouter au produit la septième partie de ce même diamètre, parce que $3\frac{1}{7}$ est le nombre de fois que 22 contient 7.

Adrien Métius a donné un rapport beaucoup plus rapproché; c'est celui de 113 à 355. Ce rapport est tel, qu'il faudrait que le diamètre d'un cercle fût de 1 000000 de pieds au moins, pour qu'on fît, en se servant de ce rapport, une erreur d'un pied sur la circonférence (1). Enfin, si l'on veut avoir la circonférence avec encore plus de précision, il n'y a qu'à employer le rapport de 1 à 3,14159265358979 32, qui passe de beaucoup les limites des besoins ordinaires, et dont on peut supprimer plus ou moins de chiffres sur la droite, selon qu'on a moins ou plus besoin d'exactitude. Comme ce rapport a pour premier terme l'unité, il est assez commode en ce que, pour trouver la circonférence d'un cercle proposé, l'opération se réduit à multiplier le nombre 3,1415926 par le diamètre de ce cercle.

Il est donc facile actuellement de trouver la surface d'un cercle proposé, du moins aussi exactement que peuvent l'exiger les besoins les plus étendus de la pratique.

Si l'on demande de combien de pieds carrés est la surface d'un cercle qui aurait 20 pieds de diamètre, je calcule sa cir-

(1) Pour retenir aisément ce rapport, il faut faire attention que les nombres qui le composent se trouvent en partageant en deux parties égales les trois premiers nombres impairs 1, 3, 5, écrits deux fois de suite en cette manière, 113355.

conférence comme ci-dessus, et, ayant trouvé qu'elle est de 62 pieds $\frac{6}{7}$, je multiplie 62 $\frac{6}{7}$ par 5, qui est la moitié du rayon (151), et j'ai 314 $\frac{2}{7}$ pieds carrés pour la surface de ce cercle.

153. On appelle *secteur de cercle* la surface comprise entre deux rayons IA, IB (*fig.* 74) et l'arc AVB, et l'on appelle *segment* la surface comprise entre l'arc AVB et sa corde AB.

Puisque le cercle peut être considéré comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, un secteur de cercle peut donc être considéré comme une portion de polygone régulier, et sa surface comme composée d'une infinité de triangles qui ont tous leurs sommets au centre, et pour hauteur le rayon; donc, *pour avoir la surface d'un secteur de cercle,* il faut multiplier l'arc qui lui sert de base par la moitié du rayon.

A l'égard du segment, il est évident que, pour en avoir la surface, il faut retrancher la surface du triangle IAB de celle du secteur IAVB.

Il est évident que, dans un même cercle, les longueurs des arcs sont proportionnelles à leurs nombres de degrés; que, par conséquent, quand on connaît la longueur de la circonférence, on peut avoir celle d'un arc de tel nombre de degrés qu'on voudra, en faisant cette proportion: 360° *sont au nombre de degrés de l'arc dont on cherche la longueur, comme la longueur de la circonférence est à celle de ce même arc.*

S'il s'agit de trouver la surface d'un secteur dont on connaît le nombre de degrés et le rayon, on cherchera, par la proportion qu'on vient de donner, la longueur de l'arc qui est la base de ce secteur, et on la multipliera par la moitié du rayon. Par exemple, si l'on demande quelle est la surface du secteur de 32°40′ dans un cercle qui a 20 pieds de diamètre, on trouvera, comme ci-dessus (151), que la circonférence est de 62 $\frac{6}{7}$ pieds; cherchant le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers sont 360°:32°40′::62$\frac{6}{7}$, ce quatrième terme, qu'on trouvera de 5 $\frac{19}{27}$, sera la longueur de l'arc de 32° 40′, laquelle étant multipliée par 5, moitié du rayon, donne 28 $\frac{14}{27}$ pour la surface du secteur de 32° 40′.

Il est aisé, d'après cela, d'avoir la surface du segment, en déterminant (*fig.* 74) le côté AB et la hauteur IZ du triangle IAB par une opération fondée sur les mêmes principes que celle que nous avons enseignée (**121**); mais la Trigonométrie, que nous verrons par la suite, nous donnera des moyens encore plus expéditifs et plus susceptibles d'exactitude.

154. Quoique ce que nous avons dit (**149**) suffise pour mesurer toute espèce de figure rectiligne, néanmoins il est à propos que nous exposions ici une autre méthode qui est plus simple dans la pratique. Elle consiste (*fig.* 93) à tirer dans la figure une ligne AG; abaisser de chacun des angles des perpendiculaires BM, LC, DK, EI, FH sur cette ligne AG; mesurer chacune de ces lignes, ainsi que les intervalles AN, NO, OP, PQ, QR, RG; alors la figure est partagée en plusieurs parties, dont les deux extrêmes tout au plus sont des triangles, et les autres sont des trapèzes: les premiers se mesurent en multipliant la hauteur par la moitié de la base (**147**); à l'égard des trapèzes, chacun se mesure en multipliant la moitié de la somme des deux côtés parallèles par la distance perpendiculaire de ces mêmes côtés (**148**).

Lorsque la figure est une ligne courbe, on la mesurera avec une exactitude suffisante pour la pratique, en partageant la ligne AT (*fig.* 94), qu'on tirera suivant sa plus grande longueur, en un assez grand nombre de parties, pour que les arcs interceptés AB, BC, CD, etc., puissent être regardés comme des lignes droites; et pour rendre le calcul le plus simple qu'il soit possible, on fera les parties AO, OP, etc., égales entre elles; alors, pour avoir la surface, on ajoutera ensemble toutes les lignes BN, CM, DL, EK, FI, et la moitié seulement de la dernière GH, si la courbe est terminée par une droite GH perpendiculaire à AT; on multipliera le tout par l'un des intervalles AO, et le produit sera la surface cherchée. C'est une suite immédiate de ce qui a été dit (**148**); car, pour avoir la surface ABN, il faut multiplier AO par la moitié de BN; pour avoir celle de BCMN, il faut multiplier OP ou AO par la

moitié de BN et de CM; pour avoir celle de CDLM, il faut multiplier AO par la moitié de CM et de DL, et ainsi de suite: donc, en réunissant ces produits, on voit que AO sera multiplié par deux moitiés de BN, plus deux moitiés de CM, plus deux moitiés de DL, plus deux moitiés de EK, plus deux moitiés de FI, plus enfin une moitié seulement de GH; c'est-à-dire que AO doit être multiplié par la totalité des lignes BN, CM, DL, EK, FI, plus la moitié de la dernière.

S'il s'agissait de l'espace BNHG terminé par les deux lignes BN, GH, on prendrait, non pas BN entière, mais sa moitié seulement.

Du Toisé des Surfaces.

155. Ce qu'on entend par *toisé* des surfaces, c'est la méthode de faire les multiplications nécessaires pour évaluer les surfaces, lorsqu'on a mesuré les dimensions en toises et parties de toise.

Il y a deux manières d'évaluer les surfaces en toises carrées et parties de la toise carrée.

Dans la première, on compte par toises carrées, pieds carrés, pouces carrés, lignes carrées, etc.

La toise carrée contient 36 pieds carrés, parce que c'est un rectangle qui a 6 pieds de long sur 6 pieds de large. Le pied carré contient 144 pouces carrés, parce que c'est un rectangle qui a 12 pouces de long sur 12 pouces de large. Par une raison semblable, on voit que le pouce carré vaut 144 lignes carrées, etc.

Ainsi, pour évaluer une surface en toises carrées et parties carrées de la toise carrée, il n'y a autre chose à faire qu'à réduire les deux dimensions qu'on doit multiplier, chacune à la plus petite espèce (en lignes, si la plus petite espèce est des lignes); et après avoir fait la multiplication, on réduira le produit en pouces carrés, ensuite en pieds carrés, et enfin en toises carrées, en divisant successivement par 144, 144 et 36. Par exemple, pour trouver la surface d'un rectangle qui aurait $2^T\,3^P\,5^p$ de long, et $0^T\,4^P\,6^p$ de large, je réduis ces deux

dimensions en pouces, et j'ai 185^{p} à multiplier par 54^{p}; ce qui me donne 9990 pouces carrés, et s'écrit ainsi : 9990^{pp}. Pour les réduire en pieds carrés, je divise par 144; j'ai 69 pieds carrés et 54^{pp} de reste, c'est-à-dire $69^{pp}\,54^{pp}$; pour réduire les 69^{pp} en toises carrées, je divise par 36; j'ai une toise carrée ou 1^{TT} pour quotient, et 33^{PP} de reste; en sorte que la surface cherchée est de $1^{TT}\,33^{PP}\,54^{pp}$.

Dans la seconde manière d'évaluer les surfaces en toises carrées et parties de la toise carrée, on conçoit la toise carrée composée de six rectangles qui ont tous une toise de haut et un pied de base, et que, pour cette raison, on nomme *toises-pieds:* on subdivise chaque toise-pied en 12 parties ou rectangles qui ont chacun une toise de haut et un pouce de base, et qu'on appelle *toises-pouces :* on subdivise chacune de celles-ci en 12 parties qui ont chacune une toise de haut et une ligne de base, et qu'on appelle *toises-lignes :* en un mot, on se représente la toise divisée et subdivisée continuellement en rectangles, qui ont constamment une toise de haut sur un pied, ou un pouce, ou une ligne, ou un point de base. Les subdivisions qui passent le point se marquent comme les minutes, secondes, tierces, quartes, etc., pour les degrés, excepté qu'on en fait précéder la marque par un T, signe de la toise; ainsi les marques successives, et les valeurs des subdivisions de la toise carrée, sont telles qu'on les voit dans la Table suivante.

Table des subdivisions de la Toise carrée en rectangles d'une toise de haut, et caractères qui représentent ces parties.

La toise carrée vaut 6 toises-pieds, ou	6^{TP}
La toise-pied vaut 12 toises-pouces, ou	12^{Tp}
La toise pouce	12^{Tl}
La toise-ligne	12^{Tpt}
La toise-point	$12^{T'}$
La T' ou toise-prime	$12^{T''}$
La T'' ou toise-seconde	$12^{T'''}$
La toise-tierce	12^{Tiv}

et ainsi de suite.

Quand on aura donc à multiplier les parties des deux lignes

pour évaluer une surface, il faut concevoir que les toises du multiplicande sont des toises carrées; les pieds, des toises-pieds; les pouces, des toises-pouces, et ainsi de suite; à l'égard du multiplicateur, il représentera toujours combien de fois on doit prendre le multiplicande. Par exemple, si, ayant à mesurer la surface du rectangle ABCD (*fig.* 95), je trouve le côté AD de $4^T\,4^P\,6^p$, et le côté AB de $2^T\,3^P$, je vois que si AE représente une toise, la surface ABCD est composée de deux rectangles qui ont chacun une toise de haut sur $4^T\,4^P\,6^p$ de long, et d'un rectangle qui a 3^P ou une demi-toise de haut sur $4^T\,4^P\,6^p$ de long, et qui par conséquent est la moitié de l'un des deux autres; de sorte que je vois qu'il s'agit de répéter deux fois et demie un rectangle de 1^T de haut sur $4^T\,4^P\,6^p$ de long, c'est-à-dire de répéter deux fois et demie la quantité $4^{TT}\,4^{TP}\,6^{Tp}$. Ce qui prouve ce que nous avons dit dans la note du n° 47 de l'*Arithmétique*, sur la nature des unités du produit et de ses facteurs dans la multiplication géométrique.

On voit en même temps qu'il n'y a ici aucune nouvelle règle à apprendre pour faire ces sortes de multiplications, qui sont évidemment les mêmes que celles que nous avons données en arithmétique, sous le nom de *multiplications des nombres complexes*. Ainsi, pour nous borner à un exemple, si l'on me demande quelle est la surface d'un rectangle qui aurait $52^T\,4^P\,5^p$ de long et $44^T\,4^P\,8^p$ de large, je fais l'opération comme il suit :

52^{T}	4^{p}	5^{p}		
44^{T}	4^{p}	8^{p}		
208^{TT}	0^{Tp}	0^{Tl}	0^{Tpt}	
208				
22				
7	2			
2	2	8		
0	3	8		
26	2	2	6	
8	4	8	10	
2	5	6	11	4
2	5	6	11	4
2361^{TT}	2^{Tp}	5^{Tp}	2^{Tl}	8^{Tpt}

C'est-à-dire je multiplie 52 par 44, puis les 4^{p} du multiplicande par 44, en prenant pour 3^{p} la moitié de 44, et pour 1^{p} le tiers de ce que j'aurai eu pour 3^{p}; ensuite je multiplie 5^{p} par 44, en prenant pour 4^{p} le tiers de ce que j'ai eu pour 1^{p}; et pour 1^{p} je prends le quart de ce que j'ai eu pour 4^{p}.

Pour multiplier ensuite par les 4^{p} qui se trouvent dans le multiplicateur, je prends pour 3^{p} la moitié du multiplicande total, et pour 1^{p} le tiers de ce que j'ai eu pour 3^{p}. Enfin, pour multiplier par 8^{p}, je prends le tiers de ce que j'ai eu pour 1^{p}, et je l'écris deux fois; réunissant tous ces produits particuliers, j'ai $2361^{TT}\ 2^{Tp}\ 5^{Tp}\ 2^{Tl}\ 8^{Tpt}$ pour produit total. Ainsi on voit que nous avons été fondés à dire, dans l'*Arithmétique,* que les règles que nous donnions pour les nombres complexes renfermaient le toisé, et qu'il n'y avait autre chose à exposer que la nature des unités du produit et des facteurs.

Quand on a ainsi évalué une surface en toises carrées, toises-pieds, toises-pouces, etc., il est fort aisé d'en trouver la valeur en toises carrées, pieds carrés, pouces carrés, etc. Il faut écrire alternativement les deux nombres 6, $\frac{1}{2}$ sous les parties de la toise, à commencer des toises-pieds, comme on le voit ci-dessous; multiplier chaque partie par le nombre inférieur qui lui répond, et porter les produits des deux nombres consécutifs 6 $\frac{1}{2}$

dans une même colonne; lorsqu'en multipliant par $\frac{1}{2}$, il restera 1, écrivez 72 sous ce multiplicateur $\frac{1}{2}$, pour commencer une seconde colonne. Ainsi, pour réduire en toises carrées, pieds carrés, pouces carrés, etc., les parties du produit que nous avons trouvé ci-dessus, j'écris :

2361^{TT}	2^{TP}	5^{Tp}	2^{Tl}	8^{Tpt}
	6	$\frac{1}{2}$	6	$\frac{1}{2}$
2361^{TT}	12^{PP}	72^{pp}		
	2	12		
		4		
2361^{TT}	14^{PP}	88^{pp}		

Et je multiplie les toises-pieds par 6, parce que la toise-pied vaut 6 pieds carrés, ayant 6 pieds de haut sur 1 pied de base. Je multiplie les toises-pouces par $\frac{1}{2}$, et je porte les deux entiers que me donne cette multiplication au rang des pieds carrés, parce que la toise-pouce étant la 12ᵉ partie de la toise-pied, doit valoir la 12ᵉ partie de 6 pieds carrés, c'est-à-dire un demi-pied carré; donc les 5 toises-pouces valent 2 pieds carrés et demi; et comme le demi-pied carré vaut 72 pouces carrés, au lieu du demi, j'écris 72; ensuite, pour réduire les toises-lignes, je les multiplie par 6, parce que la toise-ligne étant la 12ᵉ partie de la toise-pouce, doit valoir la 12ᵉ partie de 72 pouces carrés, c'est-à-dire 6 pouces carrés. Un raisonnement semblable prouve qu'on doit multiplier ensuite par $\frac{1}{2}$, puis par 6, etc., ainsi que nous venons de le dire.

Donc, réciproquement, si l'on veut réduire en toises-pieds, toises-pouces, etc., des parties carrées de la toise carrée, l'opération se réduira : 1° à prendre le sixième du nombre des pieds carrés; ce qui donnera des toises-pieds. 2° On doublera le reste, s'il y en a un, et l'on y ajoutera une unité, si le nombre des pouces carrés est ou excède 72, et l'on aura les toises-pouces. 3° Ayant retranché 72 du nombre des pouces carrés, lorsque ce nombre sera ou excédera 72, on multipliera le reste par 6, et l'on aura les toises-lignes. 4° On doublera

le reste, et l'on y ajoutera une unité, si le nombre des lignes carrées excède 72, et l'on aura le nombre des toises-points. On voit par là comment on doit continuer pour avoir les parties suivantes, lorsqu'il doit y en avoir. Ainsi, si l'on proposait de réduire $52^{TT}25^{PP}87^{PP}92^{ll}$ en toises-pieds, toises-pouces, etc., je diviserais 25 par 6, et j'aurais 4^{TP}, et 1 de reste; je double cet 1, et j'y ajoute 1, parce que le nombre des pouces carrés excède 72; j'ai donc 3^{Tp}. Je retranche 72 de 87, et je divise le reste 15 par 6; j'ai 2^{Tl}, et 3 de reste. Je double ce reste, et j'y ajoute une unité, parce que le nombre des lignes carrées excède 72; j'ai 7^{Tpts}. Je retranche 72 de 92, et je divise le reste 20 par 6; j'ai $3^{T'}$, et 2 de reste; je double ce reste, et j'ai $4^{T''}$; en sorte que j'ai en total $52^{TT}4^{TP}3^{Tp}2^{Tl}7^{Tpts}3^{T'}4^{T''}$.

156. Puisque, pour avoir la surface d'un parallélogramme, il faut multiplier le nombre des parties de la base par le nombre des parties de la hauteur, il s'ensuit (*Arith.*, 74) que si, connaissant la surface et le nombre des parties de la hauteur ou de la base, on veut avoir la base ou la hauteur, il faudra diviser le nombre qui exprime la surface par le nombre qui exprime celle des deux dimensions qui sera connue. Mais il faut bien observer que ce n'est point une surface que l'on divise alors par une ligne. La division d'une surface par une ligne n'est pas moins chimérique que la multiplication d'une ligne par une ligne. Ce que l'on fait véritablement alors, on divise une surface par une surface.

En effet, selon ce que nous avons dit (155), lorsqu'on évalue la surface du rectangle ABCD (*fig.* 95), on répète la surface du rectangle ED de même base, et qui a pour hauteur l'unité ou la mesure principale AE; on répète, dis-je, cette surface autant de fois que sa hauteur AE est comprise dans la hauteur AB: ainsi, quand on veut connaître le nombre de parties AB, ou le nombre des unités AE qu'il contient, il faut chercher combien de fois la surface ABCD contient celle du rectangle ED. Donc, si la surface ABCD étant exprimée par $361^{TT}2^{TP}5^{Tp}2^{Tl}8^{Tpts}$, la base AD est de $4^{T}3^{P}6^{p}$; pour avoir la hauteur AB, il faut concevoir que l'on a $361^{TT}2^{TP}$, etc., à diviser, non par $4^{T}3^{P}6^{p}$, mais par $4^{TT}3^{TP}6^{Tp}$; et comme la toise est alors

facteur commun du dividende et du diviseur, il est évident que le quotient sera le même que si l'un et l'autre exprimaient des toises et parties de toises linéaires; donc l'opération se réduit à diviser $361^{T}2^{P}$, etc., par $4^{T}3^{P}$; c'est-à-dire que l'on considérera le dividende et le diviseur comme exprimant des toises linéaires, et par conséquent comme étant de même espèce; et comme l'état de la question fait voir que le quotient doit être aussi de cette même espèce, c'est-à-dire exprimer des toises et parties de toises linéaires, il s'ensuit que la division doit se faire alors précisément selon la règle donnée (*Arith.*, 126 et 128).

Si la surface était donnée en toises carrées et parties carrées de la toise carrée, alors, pour plus de simplicité, on réduirait ces parties en toises-pieds, toises-pouces, etc., par ce qui vient d'être dit (155); après quoi l'on opérerait comme dans le cas précédent. Par exemple, si l'on demande la hauteur d'un parallélogramme ou d'un rectangle qui aurait $2^{T}5^{P}$ de base, et $129^{TT}29^{PP}54^{pp}$ de surface, on réduira (155) cette surface à $120^{TT}4^{TP}10^{Tp}9^{Tl}$; et la question, d'après ce qui précède, sera réduite à diviser $120^{T}4^{P}10^{p}9^{l}$ par $2^{T}5^{P}$; ce qui, en suivant la règle donnée (*Arith.*, 126 et 128), donne $42^{T}5^{P}10^{p}1^{l}\frac{13}{17}$.

De la Comparaison des Surfaces.

157. *Les surfaces des parallélogrammes sont entre elles, en général, comme les produits des bases par les hauteurs.*

C'est-à-dire que la surface d'un parallélogramme contient celle d'un autre parallélogramme, autant que le produit de la base du premier par sa hauteur contient le produit de la base du second par sa hauteur.

Cela est évident, puisque tout parallélogramme est égal au produit de sa base par sa hauteur.

De là il est aisé de conclure que lorsque deux parallélogrammes ont même hauteur, ils sont entre eux comme leurs base, et que lorsqu'ils ont même base, ils sont entre eux comme leurs hauteurs; car le rapport des produits ne changera point si l'on omet dans chacun le facteur qui leur est commun (*Arith.*, 170).

158. Puisque les triangles sont (140) moitiés de parallélogrammes de même base et de même hauteur, il faut donc conclure que *les triangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, et les triangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.*

159. *Les surfaces des parallélogrammes ou des triangles semblables sont entre elles comme les carrés de leurs côtés homologues.*

Car les surfaces des deux parallélogrammes ABCD et *abcd* (*fig.* 96 et 97) sont entre elles (157) comme les produits des bases par leurs hauteurs, c'est-à-dire que ABCD : *abcd* :: BC $\times$ AE : *bc* $\times$ *ae*. Mais si les parallélogrammes ABCD, *abcd* sont semblables, et si AB et *ab* sont deux côtés homologues, les triangles AEB, *aeb* seront semblables, parce que, outre l'angle droit en E et en *e*, ils doivent avoir de plus l'angle B égal à l'angle *b*; on aura donc (108) AE : *ae* :: AB : *ab*, ou :: BC : *bc*, à cause des parallélogrammes semblables; on peut donc (99), dans les produits BC $\times$ AE et *bc* $\times$ *ae*, substituer le rapport de BC : *bc* à celui de AE : *ae*; et alors le rapport de ces produits sera celui de $\overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$; donc ABCD : *abcd* :: $\overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$ et comme on peut prendre indifféremment pour cette base tel côté qu'on voudra, on voit donc qu'en général les surfaces des parallélogrammes semblables sont entre elles comme les carrés de leurs côtés homologues.

160. A l'égard des triangles semblables, il est évident qu'ils ont la même propriété, puisqu'ils sont moitiés de parallélogrammes de même base et de même hauteur.

161. En général, *les surfaces de deux figures semblables quelconques sont entre elles comme les carrés des côtés, ou des lignes homologues de ces figures.*

Car les surfaces de deux figures semblables peuvent toujours être regardées comme composées d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun; alors la surface de chaque triangle de la première figure sera à celle du triangle corres-

pondant dans la seconde, comme le carré d'un côté du premier est au carré du côté homologue du second (160): donc, puisque tous les côtés homologues étant en même rapport, leurs carrés doivent être aussi tous en même rapport (*Arith.*, 191), chaque triangle du premier polygone sera au triangle correspondant du second, comme le carré d'un côté quelconque du premier polygone est au carré du côté homologue du second; donc (*Arith.*, 186) la somme de tous les triangles du premier sera à la somme de tous les triangles du second, ou la surface du premier à la surface du second, aussi dans ce même rapport.

162. *Les surfaces des cercles sont donc entre elles comme les carrés de leurs rayons ou de leurs diamètres.*

Car les cercles sont des figures semblables (136), dont les rayons et les diamètres sont des lignes homologues.

On doit dire la même chose des secteurs, et des segments de même nombre de degrés.

On voit donc qu'il n'en est pas des surfaces des figures semblables comme de leurs contours: les contours suivent le rapport simple des côtés (134), c'est-à-dire que de deux figures semblables, si un côté de l'une est double, ou triple, ou quadruple, etc., d'un côté homologue de l'autre, le contour de la première sera aussi double, ou triple, ou quadruple du contour de la seconde; mais il n'en est pas ainsi des surfaces; celle de la première figure serait alors 4 fois, 9 fois, 16 fois, etc., aussi grande que celle de la seconde.

On peut rendre cette vérité sensible par les *fig.* 98 et 99, où l'on voit (*fig.* 98) que le parallélogramme ABCD, dont le côté AB est double du côté AG du parallélogramme semblable AGIE, contient quatre parallélogrammes parfaitement égaux à celui-ci; et dans la *fig.* 99, le triangle ADF, dont le côté AD est double du côté AB du triangle semblable ABC, contient quatre triangles égaux à celui-ci; pareillement, le triangle AGK, dont le côté AG est triple de AF, contient neuf triangles égaux à ABC. Il en serait de même des cercles: un cercle qui aurait un rayon double, ou triple, ou quadruple, etc., de

celui d'un autre cercle, aurait 4 fois, ou 9 fois, ou 16 fois, etc., autant de surface que celui-ci.

163. Si l'on voulait donc construire une figure semblable à une autre, et dont la surface fût à celle de celle-ci dans un rapport donné, par exemple dans le rapport de 3 à 2, il ne faudrait pas faire les côtés homologues dans le rapport de 3 à 2; car alors les surfaces seraient comme 9 à 4; mais il faudrait faire ces côtés de telle grandeur, que leurs carrés fussent entre eux :: 3 : 2; c'est-à-dire en supposant que le côté AB de la figure X (*fig.* 100) soit de 50^p, par exemple, il faudrait, pour trouver le côté homologue *ab* de la figure cherchée *x* (*fig.* 101), calculer le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers seraient $3 : 2 :: \overline{50}^2$ ou 50×50 est à un quatrième terme; ce quatrième terme, qui est $1666\frac{2}{3}$, serait le carré du côté *ab*; c'est pourquoi, tirant la racine carrée (*Arith.*, **145**), de $1666\frac{2}{3}$, on trouverait $40^p,824$, c'est-à-dire $40^p\,9^p\,10^l$ à peu près pour le côté *ab*. Quand on a un côté de la figure *x*, il est aisé de construire cette figure, selon qu'il a été dit (**135**).

164. *Si sur les trois côtés* AB, BC, AC, *d'un triangle rectangle* ABC (fig. 102), *on construit trois carrés* BEFA, BGHC, AILC, *celui qui occupera l'hypoténuse vaut toujours la somme des deux autres.*

Abaissons de l'angle droit B, sur l'hypoténuse AC, la perpendiculaire BD; les deux triangles BDA, BDC seront chacun semblables au triangle ABC (**112**); et, par conséquent, les surfaces de ces trois triangles seront entre elles comme les carrés de leurs côtés homologues; on a donc cette suite de rapports égaux, $ABD : \overline{AB}^2 :: BDC : \overline{BC}^2 :: ABC : \overline{AC}^2$, ou ABD : ABEF :: BDC : BGHC :: ABC : AILC; donc (*Arith.*, **186**) ABD + BDC : ABEF + BGHC :: ABC : AILC. Or, il est évident que ABC vaut les deux parties ABD + BDC; donc AILC vaut ABEF + BGHC; ce qu'on peut encore exprimer en cette manière, $\overline{AC}^2$ vaut $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

165. Puisque le carré de l'hypoténuse vaut la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit, concluons donc que le *carré d'un des côtés de l'angle droit vaut le carré de l'hypoténuse, moins le carré de l'autre côté; c'est-à-dire que* $\overline{BC}^2$ *vaut* $\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2$, *et* $\overline{AB}^2$ *vaut* $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$.

166. Donc, *lorsqu'on connaît deux côtés d'un triangle rectangle, on peut toujours calculer le troisième.*

Supposons, par exemple, que le côté AB soit de 12 pieds, le côté BC de 25 pieds : on demande l'hypoténuse AC. J'ajoute 144, qui est le carré du côté AB, avec 625, qui est le carré du côté BC: la somme 769 est égale au carré de l'hypoténuse AC (164); donc, si je tire la racine carrée de 769, j'aurai l'hypoténuse AC; cette racine est 27,73, à moins d'un centième près : donc le côté AC est de 27,73 pieds, c'est-à-dire de 27^p 8^p 9^l.

Si au contraire on donnait l'hypoténuse et un des côtés, on trouverait le second côté par ce qui vient d'être dit (165). Par exemple, si l'hypoténuse AC était de 54 pieds, et le côté BC de 42, et qu'on demandât de combien est le côté AB, alors de 2916, qui est le carré de l'hypoténuse 54, je retrancherais 1764, qui est le carré du côté BC; le reste 1152 serait donc la valeur du carré du côté AB; tirant la racine carrée de 1152, cette racine, qui est 33,94, serait la valeur de AB, c'est-à-dire que AB serait de 33^p,94 ou 33^p 11^p 3^l à peu près.

Cette proposition est d'une très-grande utilité; nous aurons plus d'une occasion de nous en convaincre par la suite.

167. Puisque le carré de l'hypoténuse vaut la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit, il s'ensuit que si le triangle rectangle est isocèle, comme il arrive, par exemple, dans un carré, lorsqu'on tire la diagonale AC (*fig.* 103), alors le carré de l'hypoténuse sera double du carré d'un de ses côtés; donc la surface d'un carré est à celle du carré fait sur sa diagonale, comme 1 est à 2; donc (*Arith.*, 192) le côté d'un carré est à sa diagonale, comme 1 est à la racine carrée de 2; et

comme cette racine ne peut être exprimée exactement en nombres, il s'ensuit qu'on ne peut avoir exactement en nombres le rapport du côté d'un carré à sa diagonale, c'est-à-dire que la diagonale est *incommensurable*, ou n'a aucune commune mesure avec son côté.

168. Dans la démonstration du n° **164**, on a vu que la similitude des triangles ABC, ADB, CDB, donne ABC : $\overline{AC}^2$ :: ADB : $\overline{AB}^2$ :: BDC : $\overline{BC}^2$, ou bien ABC : ADB : BCD :: $\overline{AC}^2$: $\overline{AB}^2$: $\overline{BC}^2$; mais les triangles ABC, ABD, BDC, étant tous trois de même hauteur, sont entre eux comme leurs bases (**158**); donc ABC : ADB : BDC :: AC : AD : DC; donc aussi $\overline{AC}^2$: $\overline{AB}^2$: $\overline{BC}^2$ :: AC : AD : DC; donc *le carré fait sur l'hypoténuse est à chacun des carrés faits sur les deux autres côtés, comme l'hypoténuse est à chacun des segments correspondants à ces côtés.*

169. De là on peut conclure le moyen de faire par lignes ce que nous avons enseigné à faire par nombres (**165**), c'est-à-dire de construire une figure x semblable à une figure proposée X (*fig.* 100 et 101), et dont la surface soit à celle de celle-ci dans un rapport donné.

On tirera (*fig.* 104) une ligne indéfinie DE, sur laquelle on prendra les deux parties DP et PE, telles que DP soit à PE comme la surface de la figure donnée X (*fig.* 100) doit être à celle de la figure cherchée x (*fig.* 101), c'est-à-dire :: 3 : 2, si l'on veut que x soit les deux tiers de X. Sur DE (*fig.* 104), comme diamètre, on décrira le demi-cercle DBE; et ayant élevé au point P la perpendiculaire PB, on mènera du point B, où elle rencontre la circonférence aux deux extrémités D et E, les cordes DB, BE. Sur DB on prendra BA égal à un côté AB de la figure X, et, ayant mené AC parallèle à DE, on aura BC pour le côté homologue de la figure cherchée x, que l'on construira ensuite comme il a été dit (**133**). En voici la raison : La surface de la figure X doit être à

celle de la figure x, comme le carré du côté AB est au carré du côté cherché ab, c'est-à-dire $:: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$; or, on veut que ces deux surfaces soient aussi l'une à l'autre $:: 3 : 2$; il faut donc que $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 :: 3 : 2$. Or (*fig.* 104), AB : BC :: BD : BE, et par conséquent (*Arith.*, 191) $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: \overline{BD}^2 : \overline{BE}^2$; mais comme le triangle DBE est rectangle, on a (168) $\overline{BD}^2 : \overline{BE}^2$ :: DP : PE, c'est-à-dire $:: 3 : 2$; donc $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: 3 : 2$; donc aussi $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$; donc ab doit être égal à BC.

170. Il suit encore de ce qu'on vient de dire (168), que *les carrés des cordes* AC, AD, *etc., menées par l'extrémité d'un diamètre* AB (fig. 105), *sont entre eux comme les parties* AP, AO *que coupent, sur ce diamètre, les perpendiculaires abaissées des extrémités de ces cordes.*

Car en tirant les cordes BC et BD, on aura (168) dans le triangle rectangle ACB,

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: AB : AP;$$

et dans le triangle rectangle ADB,

$$\overline{AD}^2 : \overline{AB}^2 :: AO : AB;$$

donc (100) $$\overline{AD}^2 : \overline{AC}^2 :: AO : AP.$$

Des Plans.

171. Après avoir établi la mesure et les rapports des surfaces planes, il ne nous reste plus, pour pouvoir passer aux solides, qu'à considérer les propriétés des lignes droites dans leurs différentes positions à l'égard des plans, et celles des plans dans leurs différentes positions les uns à l'égard des autres; c'est ce dont nous allons nous occuper actuellement.

Nous ne supposons aux plans dont il va être question aucune grandeur ni aucune figure déterminée; nous les supposons

étendus indéfiniment dans tous les sens; ce n'est que pour aider l'imagination que nous leur donnons les figures par lesquelles nous les représentons ici.

172. *Une ligne droite ne peut être en partie dans un plan, et en partie élevée ou abaissée à son égard.*

Car le plan (5) est une surface à laquelle une ligne droite s'applique exactement.

173. *Il en est de même d'un plan à l'égard d'un autre plan.*

Car une ligne droite qu'on tirerait dans la partie plane commune à ces deux plans, pouvant être prolongée indéfiniment dans l'un et dans l'autre, se trouverait en partie dans l'un de ces plans et en partie élevée ou abaissée à son égard; ce qui ne peut être (172).

174. *Deux lignes* AB, CD (106), *qui se coupent, sont dans un même plan.*

Car il est évident qu'on peut faire passer un plan par l'une AB de ces lignes et par un point pris arbitrairement dans la seconde; et comme le point d'intersection E, en tant qu'appartenant à AB, est dans ce même plan, la ligne CD a donc deux points dans ce plan: elle y est donc tout entière.

175. *La rencontre ou l'intersection de deux plans ne peut être qu'une ligne droite.*

Il est évident qu'elle doit être une ligne, puisqu'aucun des deux plans n'a d'épaisseur: de plus, elle doit être une ligne droite; car une ligne droite qu'on tirerait par deux points de cette intersection, est nécessairement tout entière dans chacun des deux plans: elle est donc l'intersection même.

176. *On peut donc faire passer par une même ligne droite une infinité de plans différents.*

177. Nous disons qu'*une ligne est perpendiculaire à un plan,* quand elle ne penche d'aucun côté de ce plan.

178. *Une perpendiculaire* AB *à un plan* GE (fig. 107) *est*



donc perpendiculaire à toutes les lignes BC, BC, BC, *etc., qu'on peut mener par son pied dans ce plan;* car, s'il y en avait une à laquelle elle ne fût pas perpendiculaire, elle inclinerait vers cette ligne, et par conséquent vers le plan.

179. *La ligne* AB (*fig.* 108) *étant perpendiculaire au plan* GE, *si par son pied* B *on tire une ligne* BC *dans le plan* GE, *et que l'on conçoive que le plan* ABC *tourne autour de* AB, *je dis que, dans ce mouvement, la ligne* BC *ne sortira point du plan* GE.

Imaginons le plan ABC arrivé dans une position quelconque ABD; si la ligne BC, qui alors est en BD, n'était point dans le plan GE, le plan ABD rencontrerait donc le plan GE dans une ligne droite BF, à laquelle AB serait perpendiculaire (178); BF serait donc aussi perpendiculaire sur AB; et comme BD est supposée perpendiculaire sur AB au même point B, il s'ensuivrait donc qu'au même point B, et dans un même plan ABD, on pourrait élever deux perpendiculaires AB, ce qui (27) est impossible; donc BF ne peut être différente de BD; donc BC ne peut, dans son mouvement autour de AB, sortir du plan GE.

180. Donc, *pour qu'une ligne droite* AB (fig. 108) *soit perpendiculaire à un plan* GE, *il suffit qu'elle soit perpendiculaire à deux lignes* BC, BD, *qui se rencontrent à son pied dans ce plan.*

Car si l'on conçoit que le plan de l'angle droit ABC tourne autour de AB, la ligne BC tracera (179) un plan auquel AB sera perpendiculaire; or, je dis que ce plan ne peut être autre que le plan GE des deux lignes BC et BD; car l'angle ABD étant droit, ainsi que l'angle ABC, la ligne BC, en tournant autour de AB, aura nécessairement la ligne BD pour une de ses positions; donc BD est dans le plan tracé par BC; donc AB est perpendiculaire au plan CBD.

181. *Si du point* A *d'une droite* AI *oblique à un plan* GE (fig. 109), *on abaisse une perpendiculaire* AB *sur ce plan, et qu'ayant joint les points* B *et* I *de la perpendiculaire et de*

l'oblique par une droite BI, *on mène à cette dernière une perpendiculaire* CD *dans le plan* GE, *je dis que* AI *sera aussi perpendiculaire à* CD.

Prenons, à commencer du point I, les parties égales IC, ID, et tirons les lignes BC et BD: ces deux dernières lignes seront égales entre elles (29); donc les deux triangles ABC, ABD seront égaux; car, outre l'angle ABC égal à l'angle ABD, comme étant chacun droits, le côté AB est commun, et BC est égal à BD, selon ce qu'on vient de prouver; ils ont donc un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun; ils sont donc égaux; donc AD est égal à AC; la ligne AI a donc deux points A et I également éloignés du point C et du point D; elle est donc perpendiculaire sur CD (32).

182. *Un plan est dit perpendiculaire à un autre plan,* quand il ne penche ni d'un côté ni de l'autre de ce dernier.

183. Donc, *par une même ligne* CD (fig. 110) *prise dans un plan* GE, *on ne peut conduire plus d'un plan perpendiculaire à ce plan* GE.

184. *Un plan* CK *est perpendiculaire à un autre plan* GE, *quand il passe par une droite* AB *perpendiculaire à celui-ci;* car il est évident qu'il ne peut incliner d'aucun côté du plan GE.

185. *Si par un point* A *pris dans le plan* CK *perpendiculaire au plan* GE, *on mène une perpendiculaire* AB *à la commune section* CD, *cette ligne sera aussi perpendiculaire au plan* GE.

Car, si elle ne l'était pas, on pourrait, par le point B où elle tombe, élever une perpendiculaire au plan GE, et conduire, par cette perpendiculaire et par la commune section CD, un plan qui (184) serait perpendiculaire au plan GE; on pourrait donc, par une même ligne CD prise dans le plan GE, mener deux plans perpendiculaires à celui-ci; ce qui est impossible (183); donc AB est perpendiculaire au plan GE.

186. Donc *le plan* CK *étant perpendiculaire au plan* GE,

la perpendiculaire BA, *qu'on élèvera sur le plan* GE *par un point* B *de la section commune, sera nécessairement dans le plan* CK.

De cette proposition, il suit que *deux perpendiculaires* BA, LM *à un même plan* GE, *sont parallèles*.

Car, si l'on joint leurs pieds B et L par une ligne BL, et que par cette ligne et par AB on conduise un plan CK, ce plan sera perpendiculaire au plan GE (184); et puisque LM est alors une perpendiculaire au plan GE, menée par un point L du plan CK, elle sera donc dans le plan sécant (186): or, puisque les deux lignes AB, LM sont toutes deux dans un même plan, et perpendiculaires à la même ligne BL, elles sont parallèles (36 et 37).

187. Donc, *si deux droites* AB, CD (fig. 112) *sont parallèles chacune à une troisième* HF, *elles seront aussi parallèles entre elles;* car les lignes AB, HF étant parallèles, peuvent être toutes deux perpendiculaires à un même plan GE; par la même raison, CD et EF peuvent être perpendiculaires au même plan GE; donc AB et CD étant perpendiculaires à un même plan, seront parallèles.

188. *Si deux plans* CK, NL (fig. 111) *sont perpendiculaires à un troisième* GE, *leur commune section* AB *sera aussi perpendiculaire au plan* GE.

Car la perpendiculaire qu'on élèverait par le point B sur le plan GE doit être dans chacun de ces deux plans (186); elle ne peut donc être autre que l'intersection commune.

189. On appelle *angle-plan* l'ouverture de deux plans GF, GE (*fig.* 113) qui se rencontrent: cet angle s'appelle aussi l'*inclinaison* de l'un de ces plans à l'égard de l'autre.

L'angle-plan formé par les deux plans GF, GE, n'est autre chose que la quantité dont le plan GF aurait dû tourner autour de AG pour venir dans sa situation actuelle, s'il avait été d'abord couché sur le plan GE.

190. De là il est aisé de voir que si par un point B pris dans

la commune section AG, ou même dans le plan GE la perpendiculaire BD et AG, dans le plan GF la perpendiculaire à BC à la même ligne AG, l'angle formé par les deux plans est la même chose que l'angle formé par les deux lignes BD et BC; car il est facile de voir que, pendant le mouvement du plan GF, la ligne BC s'écarte de la ligne BD sur laquelle elle était couchée au commencement du mouvement, s'écarte, dis-je, de BD, précisément selon la même loi suivant laquelle le plan GF s'écarte du plan GE.

191. Donc *un angle plan a même mesure que l'angle rectiligne compris entre deux lignes tirées, dans chacun des deux plans qui le forment, perpendiculairement à la commune section, et d'un même point de cette ligne.*

De là, il est si aisé de conclure les propositions suivantes, que nous nous contenterons de les énoncer.

192. *Un plan qui tombe sur un autre plan forme deux angles qui, pris ensemble, valent* 180°.

193. *Les angles formés par tant de plans qu'on voudra, qui passent tous par une même droite, valent* 360°.

194. *Deux plans qui se coupent font les angles opposés au sommet égaux.*

195. On appelle *plans parallèles* ceux qui ne peuvent jamais se rencontrer, à quelque distance qu'on les imagine prolongés.

196. *Les plans parallèles sont donc partout également éloignés.*

197. *Si deux plans parallèles sont coupés par un troisième plan* (fig. 114), *les intersections* AB, CD *seront deux droites parallèles;* car, comme elles sont dans un même plan ABCD, elles ne pourraient manquer de se rencontrer, si elles n'étaient pas parallèles, et alors il est évident que les plans se rencontreraient aussi.

198. *Deux plans parallèles, coupés par un troisième, ont*

les mêmes propriétés dans les angles qu'ils forment avec ce troisième, que deux lignes droites parallèles, à l'égard d'une troisième droite qui les coupe. C'est une suite de ce qui a été dit (191).

Propriétés des Lignes droites coupées par des Plans parallèles.

199. *Si d'un point* I *pris hors d'un plan* GE (fig. 115), *on tire à différents points* K, L, M *de ce plan, des droites* IK, IL, IM, *et qu'on coupe ces droites par un plan* ge *parallèle au plan* GE, *je dis,* 1° *que ces droites seront coupées proportionnellement;* 2° *que la figure* klm *sera semblable à la figure* KLM.

Ne supposons d'abord que trois points K, L, M. Puisque les droites *kl*, *lm*, *mk* sont les intersections des plans IKL, ILM, IKM avec le plan *ge*, elles sont parallèles aux droites KL, LM, MK, intersections des mêmes plans avec le plan GE (197); donc les triangles IKL, ILM, IMK sont semblables aux triangles I*kl*, I*lm*, I*mk* chacun à chacun; donc IK : I*k* :: KL : *kl* :: IL : I*l* :: LM : *lm* :: IM : I*m* :: MK : *mk*; or, 1°. si de cette suite de rapports égaux on tire seulement ceux qui renferment les droites qui partent du point I, on aura IK : I*k* :: IL : I*l* :: IM : I*m*; donc les droites IK, IL, IM sont coupées proportionnellement.

2°. Si de la même première suite de rapports égaux on tire ceux qui renferment les lignes comprises dans les deux plans parallèles, on aura KL : *kl* :: LM : *lm* :: KM : *km*; donc les deux triangles KLM, *klm* sont semblables, puisqu'ils ont les côtés proportionnels.

Supposons maintenant tel nombre de points A, B, C, D, F, etc., qu'on voudra; on démontrera précisément de la même manière, que les droites IA, IB, IC, etc., sont coupées proportionnellement; et si l'on imagine des diagonales AC, AD, etc., *ac*, *ad*, etc., menées des deux angles correspondants A et *a*, on démontrera aussi de la même manière que les triangles ABC, ACD, etc., sont semblables aux triangles *abc*, *acd*, etc., chacun à chacun : donc les deux polygones ABCDF, *abcdf*,

étant composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et semblablement disposés, sont semblables (133).

200. Puisque les deux figures KLM, *klm* sont semblables, concluons-en que l'angle KLM est égal à l'angle *klm*; et par conséquent, *si deux droites* KL, LM, *qui comprennent un angle* KLM, *sont parallèles à deux droites* kl, lm, *qui comprennent un angle* klm, *l'angle* KLM *sera égal à l'angle* klm, *lors même que ces deux angles ne seront pas dans un même plan.* Nous avons donné cette même proposition (43); mais nous supposions que les deux angles étaient dans un même plan.

201. Il suit encore de ce que les deux figures ABCDF et *abcdf* sont semblables, et de ce que les deux figures KLM, *klm* sont semblables; il suit, dis-je, que *les surfaces des deux sections* abcdf, klm, *sont entre elles comme celles des deux figures* ABCDF, KLM.

Car ABCDF : *abcdf* :: $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$ (161).

Mais les triangles semblables IAB, I*ab* donnent AB : *ab* :: IA : I*a*.

Et par conséquent (*Arith.*, 191), $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 :: \overline{IA}^2 : \overline{Ia}^2$, ou (199), :: $\overline{IM}^2 : \overline{Im}^2$ ou (à cause des triangles semblables IML, I*ml*) :: $\overline{LM}^2 : \overline{lm}^2$, et par conséquent (161) :: KLM : *klm*; donc ABCDF : *abcdf* :: KLM : *klm*, ou (*Arith.*, 182) ABCDF : KLM :: *abcdf* : *klm*.

202. Cette démonstration fait voir en même temps que les surfaces ABCDF, *abcdf* sont entre elles comme les carrés des deux droites IA et I*a* tirées du point I à deux points correspondants de ces figures, et par conséquent (199) comme les carrés des hauteurs ou perpendiculaires IP, I*p* menées du point I sur les plans GE et *ge*.

Concluons donc, 1°. Que si les deux surfaces ABCDF, KLM étaient égales, les deux surfaces *abcdf*, *klm* seraient aussi égales;

2°. Que tout ce que nous venons de dire aurait encore lieu si le point I, au lieu d'être commun aux droites IA, IB,

IC, etc., et aux droites IM, IL, etc., était différent pour chaque figure, pourvu qu'il fût à même hauteur au-dessus du plan *ge*.

SECTION III.

Des Solides.

203. Nous avons nommé *solide*, ou *volume*, ou *corps* (1), tout ce qui a les trois dimensions *longueur*, *largeur* et *profondeur*.

Nous allons nous occuper de la mesure et des rapports des solides.

Nous considérerons les solides terminés par des surfaces planes; et de ceux qui sont renfermés par des surfaces courbes, nous ne considérerons que le *cylindre*, le *cône* et la *sphère*.

Les solides terminés par des surfaces planes se distinguent en général par le nombre et la figure des plans qui les renferment; ces plans doivent être au moins au nombre de quatre.

204. Un solide, dont deux faces opposées sont deux plans égaux et parallèles, et dont toutes les autres faces sont des parallélogrammes, s'appelle en général un *prisme*. (Voy. *fig.* 116, 117, 118, 119.)

On peut donc regarder le prisme comme engendré par le mouvement d'un plan BDF qui glisserait parallèlement à lui-même le long d'une ligne droite AB (*fig.* 116).

Les deux plans parallèles se nomment les *bases* du prisme, et la perpendiculaire LM menée d'un point de l'une des bases sur l'autre base, se nomme *la hauteur*.

De l'idée que nous venons de donner du prisme, il suit qu'à quelque endroit qu'on coupe un prisme par un plan parallèle à sa base, la section sera toujours un plan parfaitement égal à la base.

Les lignes telles que BA, qui sont les rencontres de deux

parallélogrammes consécutifs, sont nommées les *arêtes* du prisme.

Le prisme est *droit,* lorsque ses arêtes sont perpendiculaires à la base; alors elles sont toutes égales à la hauteur. (Voyez *fig.* 117 et 119.)

Au contraire, le prisme est *oblique,* lorsque ses arêtes inclinent sur la base.

Les prismes se distinguent par le nombre des côtés de leur base: si la base est un triangle, le prisme est dit *prisme triangulaire* (*fig.* 116); si la base est un quadrilatère, on l'appelle *prisme quadrangulaire* (*fig.* 117); et ainsi de suite.

Parmi les prismes quadrangulaires, on distingue plus particulièrement le *parallélipipède* et le *cube.*

Le *parallélipipède* est un prisme quadrangulaire dont les bases, et par conséquent toutes les faces, sont des parallélogrammes; et lorsque le parallélogramme qui sert de base est un rectangle, et qu'en même temps le prisme est droit, on l'appelle *parallélipipède rectangle.* (Voyez *fig.* 117.)

Le parallélipipède rectangle prend le nom de *cube,* lorsque la base est un carré, et que l'arête AB (*fig.* 119) est égale au côté de ce carré.

Le cube est donc un solide compris sous six carrés égaux. C'est avec ce solide qu'on mesure tous les autres, comme nous le verrons dans peu.

205. Le *cylindre* est le solide compris entre deux cercles égaux et parallèles, et la surface que tracerait une ligne AB (*fig.* 120 et 121) qui glisserait parallèlement à elle-même le long des deux circonférences. Le cylindre est *droit,* quand la ligne CF (*fig.* 120), qui joint les centres des deux bases opposées, est perpendiculaire à ces cercles: cette ligne CF s'appelle l'*axe* du cylindre; et le cylindre est *oblique,* quand cette même ligne CF incline sur la base.

On peut considérer le cylindre droit comme engendré par le mouvement du parallélogramme rectangle FCDE tournant autour de son côté CF.

206. La *pyramide* est un solide compris sous plusieurs plans,

dont l'un, qu'on appelle la *base*, est un polygone quelconque; et les autres, qui sont tous des triangles, ont pour bases les côtés de ce polygone, et ont tous leurs sommets réunis en un même point, qu'on appelle le *sommet* de la pyramide. (Voyez *fig.* 122, 123, 124.)

La perpendiculaire AM, menée du sommet sur le plan qui sert de base, s'appelle la *hauteur* de la pyramide.

Les pyramides se distinguent par le nombre des côtés de leurs bases; en sorte que celle qui a pour base un triangle, est appelée *pyramide triangulaire;* celle qui a pour base un quadrilatère, *pyramide quadrangulaire,* et ainsi de suite.

La pyramide est dite *régulière* lorsque le polygone qui lui sert de base est régulier, et qu'en même temps la perpendiculaire AM (*fig.* 124), menée du sommet, passe par le centre de ce polygone.

La perpendiculaire AG, menée du sommet A sur l'un DE des côtés de la base, s'appelle *apothème.*

Il est clair que tous les triangles qui aboutissent au point A sont égaux et isocèles; car ils ont tous des bases égales; et les arêtes AB, AC, AD, etc., sont toutes égales, puisque ce sont toutes des obliques également éloignées de la perpendiculaire AM (29).

Il n'est pas moins évident que tous les apothèmes sont égaux.

207. Le *cône* (*fig.* 125 et 126) est le solide renfermé par le plan circulaire BGDH, qu'on appelle la base du cône, et par la surface que tracerait une ligne AB tournant autour du point fixe A, et rasant toujours la circonférence BGDH.

Le point A s'appelle le *sommet* du cône.

La perpendiculaire menée du sommet sur le plan de la base se nomme la *hauteur* du cône; et le cône est *droit* ou *oblique,* selon que cette perpendiculaire passe (*fig.* 125) ou ne passe point (*fig.* 126) par le centre de la base.

On peut concevoir le cône droit comme engendré par le mouvement du triangle rectangle ACD (*fig.* 125) tournant autour du côté AC.

208. La *sphère* est un solide terminé de toutes parts par une surface dont tous les points sont également éloignés d'un même point.

On peut considérer la sphère comme le solide qu'engendrerait le demi-cercle ABD (*fig.* 128) tournant autour du diamètre AD.

Il est évident que toute *coupe*, ou toute *section* de la sphère par un plan, est un cercle. Si ce plan passe par le centre, la section s'appelle *grand cercle* de la sphère; et l'on appelle, au contraire, *petit cercle*, toute section de la sphère par un plan qui ne passe point par le centre.

Le *secteur sphérique* est le solide qu'engendrerait le secteur circulaire BCA tournant autour du rayon AC. La surface que décrirait l'arc AB dans son mouvement, s'appelle *calotte sphérique*.

Le *segment sphérique* est le solide qu'engendrerait le demi-segment circulaire AFB tournant autour de la partie AF du rayon.

Des Solides semblables.

209. Les *solides semblables* sont ceux qui sont composés d'un même nombre de faces semblables chacune à chacune, et semblablement disposées dans les deux solides.

210. *Les arêtes homologues et les sommets des angles solides homologues sont donc des lignes et des points semblablement placés dans les deux solides;* car les arêtes homologues et les sommets des angles solides homologues sont des lignes et des points semblablement placés à l'égard des faces auxquelles ils appartiennent, puisque ces faces sont supposées semblables: or, ces faces sont semblablement disposées dans les deux solides; donc, etc.

211. Donc *les triangles qui joignent un angle solide et les extrémités d'une arête homologue dans chaque solide, sont des figures semblables, et semblablement disposées dans les deux solides;* car les extrémités des arêtes homologues sont elles-



mêmes les sommets d'angles solides homologues, qui sont (210) semblablement placés à l'égard des solides.

212. *Les diagonales qui joignent deux angles solides homologues sont donc entre elles comme les arêtes homologues de ces solides;* car elles sont les côtés des triangles semblables dont on vient de parler, et qui ont pour un de leurs côtés des arêtes homologues.

Donc deux solides semblables peuvent être partagés en un même nombre de pyramides semblables chacune à chacune, par des plans conduits par deux angles homologues, et par deux arêtes homologues. Car les faces de ces pyramides seront composées de triangles semblables, et semblablement disposés dans les deux solides (211); et les bases de ces mêmes pyramides seront aussi semblables, puisqu'elles sont des faces homologues des deux solides; donc (209) ces pyramides seront semblables.

213. *Si de deux angles homologues on abaisse des perpendiculaires sur deux faces homologues, ces perpendiculaires seront entre elles dans le rapport de deux arêtes homologues quelconques.*

Car les deux angles homologues étant semblablement disposés à l'égard de deux faces homologues (210), doivent nécessairement être à des distances de ces faces qui soient entre elles dans le rapport des dimensions homologues des deux solides.

De la mesure des Surfaces des Solides.

214. Les surfaces des prismes et des pyramides étant composées de parallélogrammes, de triangles et de polygones rectilignes, nous pourrions nous dispenser de rien dire ici sur la manière dont on doit s'y prendre pour les mesurer, puisque nous avons donné (145, 147 et 149) les moyens de mesurer les parties dont elles sont composées. Mais on peut tirer de ce que nous avons dit à ce sujet quelques conséquences, qui nou-

seulement serviront à simplifier les opérations qu'exigent ces mesures, mais nous seront encore utiles pour évaluer les surfaces des cylindres, des cônes, et même de la sphère.

215. *La surface d'un prisme quelconque (en n'y comprenant point les deux bases) est égale au produit de l'une des arêtes de ce prisme, par le contour d'une section* bdfhk (fig. 118), *faite par un plan auquel cette arête serait perpendiculaire.*

Car, puisque l'arête AB est supposée perpendiculaire au plan *bdfhk*, les autres arêtes, qui sont toutes parallèles à celles-là, seront aussi perpendiculaires au plan *bdfhk* : donc, réciproquement, les droites *bd*, *df*, *fh*, *hk*, etc., seront perpendiculaires chacune sur l'arête qu'elle coupe ; en considérant donc les arêtes comme les bases des parallélogrammes qui enveloppent le prisme, les lignes *bd*, *df*, *fh*, etc., en seront les hauteurs. Il faudra donc, pour avoir la surface du prisme, multiplier l'arête AB par la perpendiculaire *bd*; l'arête CD par la perpendiculaire *df*, et ainsi de suite, et ajouter tous ces produits; mais, comme toutes les arêtes sont égales, il est évident qu'il revient au même d'en multiplier une seule AB par la somme de toutes les hauteurs, c'est-à-dire par le contour *bdfhk*.

216. Quand le prisme est droit, la section *bdfhk* ne diffère pas de la base BDFHK, et l'arête AB est alors la hauteur du prisme ; donc *la surface d'un prisme droit (en n'y comprenant point les deux bases) est égale au produit du contour de la base, multiplié par la hauteur.*

217. Nous avons vu ci-dessus (136) qu'on pouvait considérer le cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés ; donc le cylindre peut être considéré comme un prisme dont le nombre des parallélogrammes qui composent la surface serait infini ; donc

La surface d'un cylindre droit est égale au produit de la hauteur de ce cylindre, par la circonférence de sa base. Nous avons vu (182) comment on doit s'y prendre pour avoir cette circonférence.

A l'égard du cylindre oblique, il faut multiplier sa lon-

gueur AB par la circonférence de la section *bgdh* (*fig.* 121), cette section étant faite comme il a été dit (215). La méthode pour déterminer la longueur de cette section dépend de connaissances plus étendues que celles que nous avons données jusqu'ici; dans la pratique, il faut se contenter de la mesurer mécaniquement, en enveloppant le cylindre avec un fil (ou autre chose équivalente), qu'on aura soin d'assujettir dans un plan auquel la longueur AB de ce cylindre soit perpendiculaire.

218. *Pour la pyramide*, si elle n'est pas régulière, il faudra chercher séparément la surface de chacun des triangles qui la composent, et ajouter ces surfaces.

Mais si elle est régulière, on peut avoir sa surface plus brièvement, en multipliant le contour de sa base par la moitié de l'apothème AG (*fig.* 124); car, tous les triangles étant de même hauteur, il suffit de multiplier la moitié de la hauteur commune par la somme de toutes les bases.

219. En considérant encore la circonférence d'un cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, on voit que le cône n'est au fond qu'une pyramide régulière, dont la surface (non compris celle de la base) est composée d'une infinité de triangles, et que par conséquent *la surface convexe d'un cône droit est égale au produit de la circonférence de sa base, par la moitié du côté* AB *de ce cône* (fig. 125).

A l'égard de la surface du cône oblique, elle dépend d'une géométrie plus composée; ainsi nous n'en parlerons point ici. Au reste, la manière dont nous venons de considérer le cône donne le moyen de le mesurer à peu près lorsqu'il est oblique: Il faut partager la circonférence de la base en un assez grand nombre d'arcs, pour que chacun puisse être considéré, sans erreur sensible, comme une ligne droite; et alors on calculera la surface comme pour une pyramide qui aurait autant de triangles qu'on aura d'arcs.

220. *Pour avoir la surface d'un tronc de cône droit, dont les bases opposées* BDGH, bdgb (fig. 127), *sont parallèles, il*

faut multiplier le côté Bb *de ce tronc par la moitié de la somme des circonférences des deux bases opposées.*

En effet, on peut concevoir cette surface comme l'assemblage d'une infinité de trapèzes tels que EF*fe*, dont les côtés E*e*, E*f* tendent au sommet A ; or, la surface de chacun de ces trapèzes est égale à la moitié de la somme des deux bases opposées EF, *ef*, multipliée par la distance de ces deux bases (148); mais cette distance ne diffère pas des côtés E*e*, F*f* ou B*b*; donc, pour avoir la somme de tous ces trapèzes, il faut multiplier la moitié de la somme de toutes les bases opposées, telles que EF, *ef*, c'est-à-dire la moitié de la somme des deux circonférences, par la ligne B*b*, hauteur commune de tous ces trapèzes.

221. Si, par le milieu M du côté B*b* on conduit un plan parallèle à la base, la section (199) sera un cercle dont la circonférence sera la moitié de la somme des circonférences des deux bases opposées, puisque son diamètre MN (148) est la moitié de la somme de ces deux bases, et que (136) les circonférences sont entre elles comme leurs diamètres; donc *la surface d'un cône tronqué, à bases parallèles, est égale au produit du côté du tronc par la circonférence de la section faite à distances égales des deux bases opposées.* Cette proposition va nous servir pour la démonstration de la suivante.

222. *La surface d'une sphère est égale au produit de la circonférence d'un de ces grands cercles, multipliée par le diamètre.*

Concevez la demi-circonférence AKD (*fig.* 129) divisée en une infinité d'arcs; chacun de ces arcs, tels que KL, étant infiniment petit, se confondra avec sa corde.

Menons par les extrémités de KL les perpendiculaires KE, LF au diamètre AD; et par le milieu I de KL ou de sa corde, menons IH parallèle à KE, et le rayon IC; ce rayon sera perpendiculaire sur KL (82): tirons enfin KM perpendiculaire sur IH ou sur LF. Si l'on conçoit que la demi-circonférence AKD tourne autour de AD, elle engendrera la surface de la sphère, et chacun de ses arcs KL engendrera la surface d'un

cône tronqué, qui sera un élément de celle de la sphère. Nous allons voir que la surface de ce cône tronqué est égale au produit de KM ou EF, multiplié par la circonférence qui a pour rayon IC ou AC.

Le triangle KML est semblable au triangle IHC, puisque ces deux triangles ont les côtés perpendiculaires l'un à l'autre, d'après ce qu'on vient de prescrire. Ces triangles semblables donneront donc (**112**) cette proportion, KL : KL :: IC : IH, ou, puisque (**136**) les circonférences sont entre elles comme leurs rayons, KL : KM :: *cir.* IC : *cir.* IH (*); donc, puisque (*Arith.*, **178**) dans toute proportion le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, KL $\times$ *circ.* IH est égal à KM $\times$ *circ.* IC, ou, ce qui revient au même, est égal à EF $\times$ *cir.* AC. Or (**221**), le premier de ces produits exprime la surface du cône tronqué engendré par KL; donc ce cône tronqué est égal à EF $\times$ *cir.* AC, c'est-à-dire au cercle de la sphère. Et comme, en prenant tout autre arc que KL, on démontrerait la même chose et de la même manière, on doit conclure que la somme des petits cônes tronqués qui composent la surface de la sphère est égale à la circonférence d'un des grands cercles, multipliée par la somme des hauteurs de ces cônes tronqués, laquelle somme compose évidemment le diamètre. Donc la surface de la sphère est égale à la circonférence d'un de ses grands cercles, multipliée par le diamètre.

223. Si l'on conçoit un cylindre (*fig.* 130) qui entoure la sphère en la touchant, et qui ait pour hauteur le diamètre de cette sphère, c'est-à-dire si l'on conçoit un cylindre circonscrit à la sphère, on pourra conclure que la *surface de la sphère est égale à la surface convexe du cylindre circonscrit;* car (**217**) la surface de ce cylindre est égale au produit de la circonférence de la base, multipliée par la hauteur: or, la circonférence de la base est celle d'un grand cercle de la sphère, et la hauteur est égale au diamètre; donc, etc.

(*) Par ces expressions *circ.* IC, *circ.* IH, nous entendons la circonférence qui a pour rayon IC, la circonférence qui a pour rayon IH.

224. Puisque (181) pour avoir la surface d'un cercle, il faut multiplier la circonférence par la moitié du rayon ou le quart du diamètre, et que pour avoir celle de la sphère, il faut multiplier la circonférence par le diamètre, on doit donc dire que *la surface de la sphère est quadruple de celle d'un de ses grands cercles.*

225. La démonstration que nous venons de donner de la mesure de la surface de la sphère prouve également que pour avoir la surface convexe du segment sphérique qu'engendrerait l'arc AL (*fig.* 131) tournant autour du diamètre AD, il faut multiplier la circonférence d'un grand cercle de la sphère par la hauteur AI de ce segment, et que pour avoir celle d'une portion de sphère comprise entre deux plans parallèles, tels que LKM, NRP, il faut pareillement multiplier la circonférence d'un grand cercle de la sphère par la hauteur IO de cette portion de sphère; car on peut considérer ces surfaces, ainsi qu'on l'a fait pour la sphère entière, comme composées d'une infinité de cônes tronqués, dont chacun est égal au produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle de la sphère.

Des Rapports des Surfaces des Solides.

226. Si deux solides dont on a dessein de comparer les surfaces sont terminés par des plans dissemblables et irréguliers, le seul parti qu'il y ait à prendre pour trouver le rapport de leurs surfaces, est de calculer séparément la surface de chacun en mesures de même espèce, et de comparer le nombre des mesures de l'une au nombre des mesures de l'autre, c'est-à-dire, par exemple, le nombre des pieds carrés de l'une au nombre des pieds carrés de l'autre.

227. *Les surfaces des prismes, en n'y comprenant point les bases opposées, sont entre elles comme les produits de la longueur de ces prismes, par le contour de la section faite perpendiculairement à cette longueur.*

Car ces surfaces sont égales à ces produits (215).

228. Donc, *si les longueurs sont égales, les surfaces des*

prismes seront entre elles comme le contour de la section faite perpendiculairement à la longueur de chacun.

Car le rapport des produits de la longueur par le contour de cette section ne changera point, si l'on omet, dans chacun de ces produits, la longueur qui en est facteur commun.

229. Donc *les surfaces des prismes droits ou des cylindres droits de même hauteur sont entre elles comme les contours des bases, quelque figure qu'aient d'ailleurs ces bases.*

Et si, au contraire, *les contours des bases sont les mêmes, et les hauteurs différentes, ces surfaces seront comme les hauteurs.*

230. *Les surfaces des cônes droits sont entre elles comme les produits des côtés de ces cônes, par les circonférences des bases, ou par les rayons, ou par les diamètres de ces bases.*

Car ces surfaces étant égales chacune au produit de la circonférence de la base par la moitié du côté du cône (**219**), doivent être entre elles comme ces produits, et par conséquent comme le double de ces produits. D'ailleurs, comme les circonférences ont entre elles le même rapport que leurs rayons ou leurs diamètres, on peut (**99**) substituer dans ces produits le rapport des rayons, ou celui des diamètres à celui des circonférences.

231. *Les surfaces des solides semblables sont entre elles comme les carrés de leurs lignes homologues.*

Car elles sont composées de plans semblables, dont les surfaces sont entre elles comme les carrés de leurs côtés ou de leurs lignes homologues, lesquelles lignes sont lignes homologues des solides, et proportionnelles à toutes les autres lignes homologues.

232. *Les surfaces de deux sphères sont entre elles comme les carrés de leurs rayons ou de leurs diamètres.*

Car la surface d'une sphère étant quadruple de celle de son grand cercle, les surfaces de deux sphères doivent être entre elles comme le quadruple de leurs grands cercles, ou simplement comme leurs grands cercles, c'est-à-dire (**162**) comme les carrés des rayons ou des diamètres.

De la Solidité des Prismes.

233. Pour fixer les idées sur ce qu'on doit entendre par la *solidité* d'un corps, il faut se représenter par la pensée, une portion d'étendue de telle forme qu'on voudra, de la forme d'un cube par exemple, mais qui ait infiniment peu de longueur, de largeur et de profondeur, et concevoir que la capacité d'un corps est entièrement remplie de pareils cubes, que nous nommerons *points solides*. La totalite de ces points forme ce que nous entendons par *solidité d'un corps*.

234. *Deux prismes ou deux cylindres, ou un prisme et un cylindre de même base et de même hauteur, ou de bases égales et de hauteurs égales, sont égaux en solidité, quelque différentes que soient d'ailleurs les figures des bases.*

Car, si l'on imagine ces corps coupés, par des plans parallèles à leurs bases, en tranches infiniment minces, et d'une épaisseur égale à celle des points solides dont on peut imaginer que ces corps sont remplis, il est visible que dans chacun, chaque section étant égale à la base (204), le nombre des points solides dont chaque tranche sera composée sera partout le même, et égal au nombre des points superficiels de la base; et comme on suppose même hauteur aux deux solides, ils auront chacun le même nombre de tranches; ils contiendront donc en totalité le même nombre de points solides: donc ils sont égaux en solidité.

De la Mesure de la Solidité des Prismes et des Cylindres.

235. La considération des points solides dont nous venons de faire usage est principalement utile lorsque, pour démontrer l'égalité de deux solides, on est obligé de considérer ces solides dans leurs éléments mêmes, en les décomposant en tranches infiniment minces; nous aurons encore occasion de les considérer de cette manière. Mais, lorsqu'on veut mesurer les capacités ou solidités des corps, pour les usages ordinaires, ce n'est point en cherchant à évaluer le nombre de leurs points

solides qu'on y parvient; car on conçoit très-bien que, dans tel corps que ce soit, il y a une infinité de ces sortes de points.

Que fait-on donc, à proprement parler, quand on mesure la solidité des corps? On cherche à déterminer combien de fois le corps dont il s'agit contient un autre corps connu. Par exemple, quand on veut mesurer le parallélipipède rectangle ABCDEFGH (*fig.* 132), on a pour objet de connaître combien ce parallélipipède contient de cubes, tels que le cube connu x; c'est ordinairement en mesures cubiques qu'on évalue la solidité des corps.

Pour connaître la solidité du parallélipipède rectangle ABCDEFGH, il faut chercher combien sa base EFGH contient de parties carrées, telles que *efgh*; chercher pareillement combien la hauteur AH contient de fois la hauteur *ah*; et multipliant le nombre des parties carrées de EFGH par le nombre des parties de AH, le produit exprimera combien le parallélipipède proposé contient de cubes tels que x, c'est-à-dire combien il contient de pieds cubes, ou de pouces cubes, etc., si le côté *ah* du cube x est d'un pied ou d'un pouce.

En effet, on voit qu'on peut placer sur la surface EFGH autant de cubes, tels que x, qu'il y a de carrés tels que *efgh*, dans la base EFGH. Tous ces cubes formeront un parallélipipède dont la hauteur HL sera égale à *ah*: or, il est évident que l'on pourra placer dans le solide ABCDEFGH autant de parallélipipèdes, tels que celui-là, que la hauteur HL sera contenue de fois dans AH; donc il faut répéter ce parallélipipède, ou le nombre des cubes répandus sur EFGH, autant de fois qu'il y a de parties dans AH; ou, puisque le nombre de ces cubes est le même que le nombre des carrés contenus dans la base, il faut multiplier le nombre des carrés contenus dans la base par le nombre des parties de la hauteur, et le produit exprimera le nombre des cubes contenus dans le parallélipipède proposé.

236. Puisqu'on a démontré (234) que les prismes de bases égales et de hauteurs égales sont égaux en solidité, il suit de cette proposition, et de ce que nous venons de dire, que pour

avoir le nombre de mesures cubes que renfermerait le prisme quelconque ACEGIKBDFH (*fig.* 118), il faut évaluer sa base KBDFH en mesures carrées, et sa hauteur LM en parties égales au côté du cube qu'on prend pour mesure, et multiplier le nombre des mesures carrées qu'on aura trouvées dans la base, par le nombre des mesures linéaires de la hauteur, ce qu'on exprime ordinairement en disant : *La solidité d'un prisme quelconque est égale au produit de la surface de la base par la hauteur de ce prisme.*

Mais nous devons observer ici la même chose que nous avons fait remarquer (145) à l'occasion des surfaces : de même qu'on ne peut pas dire avec exactitude qu'on multiplie une ligne par une ligne, on ne peut pas dire non plus qu'on multiplie une surface par une ligne. C'est, ainsi qu'on vient de le voir, un solide dont le nombre des cubes est le même que le nombre des carrés de la base, qu'on répète autant de fois que sa hauteur est comprise dans celle du solide total, c'est-à-dire autant de fois qu'il l'est dans le solide qu'on veut mesurer.

237. Concluons de ce qui précède, que pour *avoir la solidité d'un cylindre droit ou oblique, il faut pareillement multiplier la surface de sa base par la hauteur de ce cylindre,* puisqu'un cylindre est égal à un prisme de même base et de même hauteur que lui (234).

De la Solidité des Pyramides.

238. Rappelons-nous ce qui a été dit (201), et en l'appliquant aux pyramides, nous en conclurons que, si l'on coupe deux pyramides IABCDF, IKLM (*fig.* 115) de même hauteur, par un même plan *ge* parallèle au plan de leur base (*), les sections *abcdf*, *klm* seront entre elles dans le rapport des bases ABCDF, KLM, et seront par conséquent égales, si ces bases sont égales. Si l'on conçoit de nouveau ces pyramides coupées

(*) Nous supposons, pour plus de simplicité, qu'on ait rendu le sommet commun, et qu'on ait placé les bases sur un même plan GE.

par un plan parallèle au plan *ge*, et infiniment près de celui-ci, on voit que les deux tranches solides comprises entre ces deux plans infiniment voisins doivent être aussi entre elles dans le rapport des bases; car le nombre des points solides nécessaires pour remplir ces deux tranches d'égale épaisseur ne peut dépendre que de la grandeur des sections correspondantes. Cela posé, comme les deux pyramides sont de même hauteur, on ne peut pas concevoir plus de tranches dans l'une que dans l'autre; ainsi, les tranches correspondantes étant toujours dans le rapport des bases, les totalités de ces tranches, et par conséquent les solidités des pyramides, seront entre elles comme les bases. Donc *les solidités de deux pyramides de même hauteur sont entre elles comme les bases de ces pyramides*, et par conséquent *les pyramides de bases égales et de hauteurs égales sont égales en solidité, quelque différentes que soient d'ailleurs les figures des bases.*

Mesures de la Solidité des Pyramides.

239. Puisque mesurer un corps n'est autre chose que chercher combien de fois il contient un autre corps connu, ou en général chercher quel est son rapport avec un autre corps connu, il ne s'agit donc, pour pouvoir mesurer les pyramides, que de trouver leur rapport avec les prismes. C'est ce que nous allons établir dans la proposition suivante.

240. *Une pyramide quelconque est le tiers d'un prisme de même base et de même hauteur qu'elle.*

La démonstration de cette proposition se réduit à faire voir qu'une pyramide triangulaire est le tiers d'un prisme triangulaire de même base et de même hauteur qu'elle; car on peut toujours concevoir un prisme comme composé d'autant de prismes triangulaires, et une pyramide comme composée d'autant de pyramides triangulaires, qu'on peut concevoir de triangles dans le polygone qui sert de base à l'un et à l'autre. (Voyez *fig.* 118.)

Or, voici comment on peut se convaincre de la vérité de la

proposition pour la pyramide triangulaire. Soit ABCDEF (*fig.* 133) un prisme triangulaire : concevez que sur les faces AE, CE de ce prisme on ait tiré les deux diagonales BD, BF, et que suivant ces diagonales on ait conduit un plan BDF; ce plan détachera du prisme une pyramide de même base et de même hauteur que ce prisme, puisqu'elle a son sommet en B dans la base supérieure, et qu'elle a pour base la base même inférieure DEF du prisme : on voit cette pyramide isolée dans la *fig.* 134, et la *fig.* 135 représente ce qui reste du prisme.

On peut se représenter ce reste comme renversé ou couché sur la face ADFC; et alors on voit que c'est une pyramide quadrangulaire, qui a pour base le parallélogramme ADFC, et pour sommet le point B; donc, si l'on conçoit que dans la base ADFC on ait tiré la diagonale CD, on pourra se représenter que la pyramide totale ADECB est composée de deux pyramides triangulaires ADCB, CFDB, qui auront pour bases les deux triangles égaux ACD, CDF, et pour sommet commun le point B, et qui, par conséquent, seront égales (238). Or, de ces deux pyramides, l'une, savoir la pyramide ADCB, peut être conçue comme ayant pour base le triangle ABC, c'est-à-dire la base supérieure du prisme, et pour sommet le point D, qui a appartenu à la base inférieure; cette pyramide est donc égale à la pyramide DEFB (*fig.* 134), puisqu'elle a même base et même hauteur que celle-ci; donc les trois pyramides DEFB, ADCB, CFDB sont égales entre elles; et puisque réunies elles composent le prisme, il faut en conclure que chacune est le tiers du prisme; ainsi la pyramide DEFB est le tiers du prisme ABCDEF de même base et de même hauteur qu'elle.

241. Puisqu'un cône peut être considéré comme une pyramide dont le contour de la base aurait une infinité de côtés, et le cylindre comme un prisme dont le contour de la base aurait aussi une infinité de côtés, il faut en conclure qu'*un cône droit ou oblique est le tiers d'un cylindre de même base et de même hauteur*.

242. Donc, *pour avoir la solidité d'une pyramide ou d'un*

cône quelconque, il faut multiplier la surface de la base par le tiers de la hauteur.

243. A l'égard du tronc de pyramide ou de cône, lorsque les deux bases opposées sont parallèles, ce qu'il y a à faire pour en trouver la solidité, consiste à trouver la hauteur de la pyramide retranchée, et alors il est aisé de calculer la solidité de la pyramide entière et de la pyramide retranchée, et par conséquent celle du tronc. Par exemple, dans la *fig.* 115, si je veux avoir la solidité du tronc KLMklm, je vois (242) qu'il faut multiplier la surface KLM par le tiers de la hauteur IP; multiplier pareillement la surface klm par le tiers de la hauteur Ip, et retrancher ce dernier produit du premier; mais, comme on ne connaît ni la hauteur de la pyramide totale, ni celle de la pyramide retranchée, voici comment on déterminera l'une et l'autre. On a vu ci-dessus (199) que les lignes IL, IM, IP, etc., sont coupées proportionnellement par le plan ge, et qu'elles sont à leurs parties Il, Im, Ip, comme LM : lm; on aura donc

$$LM : lm :: IP : Ip.$$

Donc (*Arith.*, 184)

$$LM - lm : LM :: IP - Ip : IP,$$

c'est-à-dire

$$LM - lm : LM :: Pp : IP.$$

Or, quand on connaît le tronc, on peut aisément mesurer les côtés LM, lm et la hauteur Pp; on pourra donc, par cette proportion, calculer le quatrième terme IP (179), ou la hauteur de la pyramide totale; et en retranchant celle du tronc, on aura la hauteur de la pyramide retranchée.

De la Solidité de la Sphère, de ses Secteurs, et de ses Segments.

244. *Pour avoir la solidité d'une sphère, il faut multiplier sa surface par le tiers du rayon.*

Car on peut considérer la surface de la sphère comme l'as-

semblage d'une infinité de plans infiniment petits, dont chacun sert de base à une petite pyramide qui a son sommet au centre de la sphère, et qui, par conséquent, a pour hauteur le rayon. Puis donc que chacune de ces petites pyramides est égale (242) au produit de sa base par le tiers de sa hauteur, c'est-à-dire par le tiers du rayon, elles seront toutes ensemble égales au produit de la somme de toutes leurs bases par le tiers du rayon, c'est-à-dire égales au produit de la surface de la sphère par le tiers du rayon.

245. Puisque la surface de la sphère est (224) quadruple de celle d'un de ses grands cercles, *on peut donc, pour avoir la solidité d'une sphère, multiplier le tiers du rayon par quatre fois la surface d'un des grands cercles, ou quatre fois le tiers du rayon par la surface d'un des grands cercles, ou enfin les deux tiers du diamètre par la surface d'un des grands cercles.*

246. Pour avoir la solidité d'un cylindre, nous avons vu qu'il fallait multiplier la surface de la base par la hauteur; s'il s'agit donc du cylindre circonscrit à la sphère (*fig.* 130), on peut dire que sa solidité est égale au produit d'un des grands cercles de la sphère par le diamètre: or, celle de la sphère (245) est égale au produit d'un des grands cercles par les deux tiers du diamètre; donc *la solidité de la sphère n'est que les deux tiers de celle du cylindre circonscrit.*

247. La calotte sphérique AGBHEA, qui sert de base à un secteur sphérique CBGEHA (*fig.* 128), peut être aussi considérée comme l'assemblage d'une infinité de plans infiniment petits; et, par conséquent, le secteur sphérique lui-même peut être considéré comme l'assemblage d'une infinité de pyramides qui ont toutes pour hauteur le rayon, et dont la totalité des bases forme la surface de ce secteur; donc *le secteur sphérique est égal au produit de la surface de la calotte par le tiers du rayon.* Nous avons vu (225) comment on trouve la surface de la calotte.

248. A l'égard du segment, comme il vaut le secteur CBGEHA, moins le cône CBGEH, ayant enseigné (247) et (242) la ma-

nière de trouver la solidité de ces deux corps, il ne nous reste rien à dire sur cet article.

De la Mesure des autres Solides.

249. Pour les autres solides terminés par des surfaces planes, la méthode qui se présente naturellement pour les mesurer, c'est de les imaginer composés de pyramides qui aient pour bases ces surfaces planes, et pour sommet commun l'un des angles du solide dont il s'agit; mais, outre que cette méthode est rarement la plus commode, elle est d'ailleurs moins expéditive et moins propre pour la pratique que la suivante, que nous exposerons ici d'autant plus volontiers, qu'elle peut être employée utilement à la mesure de la solidité de la carène des vaisseaux, comme nous le ferons voir quand nous aurons établi les propositions suivantes.

250. Nous appellerons *prisme tronqué* le solide ABCDEF (*fig.* 136) qui reste lorsqu'on a séparé une partie d'un prisme par un plan ABC incliné à la base.

251. *Un prisme triangulaire tronqué est composé de trois pyramides qui ont chacune pour base la base* DEF *du prisme, et dont la première a son sommet en* B, *la seconde en* A, *et la troisième en* C.

Avec une légère attention, on peut se représenter le prisme tronqué comme composé de deux pyramides: l'une triangulaire, qui aura son sommet au point B, et pour base le triangle DEF; la seconde, qui aura aussi son sommet au point B, mais qui aura pour base le quadrilatère ADFC.

Si l'on tire la diagonale AF, on peut se représenter la pyramide quandrangulaire BADFC comme composée de deux pyramides triangulaires BADF, BACF: or, la pyramide BADF est égale en solidité à une pyramide EADF, qui, ayant la même base ADF, aurait son sommet au point E; car la ligne BE étant parallèle au plan ADF, ces deux pyramides auront même hauteur; mais la pyramide EADF peut être considérée comme

ayant pour base EDF, et son sommet au point A; voilà donc, jusqu'ici, deux des trois pyramides dont nous avons dit que le prisme tronqué doit être composé; il ne reste donc plus qu'à faire voir que la pyramide BACF est équivalente à une pyramide qui aurait aussi pour base EDF, et qui aurait son sommet en C; or, c'est ce qu'il est facile de voir en tirant la diagonale CD, et faisant attention que la pyramide BACF doit être égale à la pyramide EDCF, parce que ces deux pyramides ont leurs sommets B et E dans la même ligne BE parallèle au plan ACFD de leurs bases, et que ces bases ACF et CFD sont égales, puisque ce sont des triangles qui ont même base CF, et qui sont compris entre les parallèles AD et CF. Ainsi la pyramide BACF est égale à la pyramide EDCF; mais celle-ci peut être considérée comme ayant pour base DEF et son sommet en C; donc, en effet, le prisme tronqué est composé de trois pyramides qui ont pour base commune le triangle DEF, et dont la première a son sommet en B, la seconde en A, et la troisième en C.

252. Donc, *pour avoir la solidité d'un prisme triangulaire tronqué, il faut abaisser de chacun des angles de la base supérieure une perpendiculaire sur la base inférieure, et multiplier la base inférieure par le tiers de la somme de ces trois perpendiculaires.*

253. On peut tirer de cette proposition plusieurs conséquences pour la mesure des prismes tronqués autres que les triangulaires, et même pour d'autres solides: si l'on conçoit, par exemple, que, de tous les angles d'un solide terminé par des surfaces planes, on mène sur un même plan, pris comme on le voudra, des perpendiculaires, on fera naître autant de prismes tronqués qu'il y aura de faces dans le solide; comme chaque prisme tronqué devient facile à mesurer, d'après ce que nous venons de dire, tout solide terminé par des surfaces planes se mesurera donc aussi facilement par les mêmes principes: nous n'entrerons pas dans ce détail; nous nous bornerons à en tirer une conséquence utile à notre objet.

254. Soit donc ABCDEFGH (*fig.* 137) un solide composé de

deux prismes triangulaires tronqués ABCEFG, ADCEHG, dont les arêtes AE, BF, CG, DH, soient perpendiculaires à la base, et qui soient tels que les bases EFG, EHG forment le parallélogramme EFGH, et que les bases supérieures soient, pour plus de généralité, deux plans différemment inclinés à la base EFGH. Il suit de ce qui a été dit ci-dessus (252), que le solide ABCDEFG est égal au triangle EFG multiplié par $\frac{BF + 2AE + 2GC + HD}{3}$; car le prisme tronqué ABCEFG est égal (252) au triangle EFG multiplié par $\frac{BF + AE + GC}{3}$; et par la même raison, le prisme tronqué ADCEHG est égal au triangle EGH, ou, ce qui revient au même, au triangle EFG multiplié par $\frac{AE + GC + HD}{3}$; donc la totalité de ces deux prismes tronqués est égale au triangle EFG multiplié par $\frac{BF + 2AE + 2GC + HD}{3}$.

Soient maintenant un solide (*fig.* 138) compris entre deux plans ABLM, *ablm*, parallèles, deux autres plans AB*ba*, ML*lm* parallèles entre eux, et perpendiculaires aux deux autres, un plan BL*lb* perpendiculaire à ceux-là, et enfin la surface courbe AHM*mha*; et concevons ce solide coupé par des plans C*d*, E*f*, G*h*, etc., parallèles à AB*ba*, également distants les uns des autres, et assez près pour qu'on puisse regarder AD, *ad*, DF, *df*, etc., comme des lignes droites: supposons enfin que les deux plans ABLM, *ablm* sont assez près l'un de l'autre pour qu'on puisse regarder, sans erreur sensible, les sections D*d*, F*f*, H*h*, etc., comme des lignes droites; il est visible que les solides partiels AD*dab*BC*c*, DF*fdc*CE*e*, etc., sont dans le cas du solide de la *fig.* 137. Donc la totalité de ces solides sera égale au triangle *b*BC multiplié par $\frac{AB + 2ab + 2CD + cd}{3}$

$$+ \frac{CD + 2cd + 2EF + ef}{3} + \frac{EF + 2ef + 2GH + gh}{3}$$

$$+ \frac{GH + 2gh + 2IK + ik}{3} + \frac{IK + 2ik + 2LM + lm}{3};$$

c'est-à-dire, en réunissant les quantités semblables, sera égale au triangle bBC multiplié par $\frac{1}{3}AB + \frac{2}{3}ab + CD + cd + EF + ef + GH + gh + IK + ik + \frac{2}{3}LM + \frac{1}{3}lm$; et comme le triangle bBC est égal à $\frac{Bb \times BC}{2}$, le solide entier sera égal à $\frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{3}AB + \frac{2}{3}ab + CD + cd + EF + ef + GH + gh + IK + ik + \frac{2}{3}LM + \frac{1}{3}lm)$.

Dans la vue de rendre cette expression plus simple, remarquons que si, au lieu de $\frac{1}{3}AB + \frac{2}{3}ab + \frac{2}{3}LM + \frac{1}{3}lm$ que l'on a entre les deux parenthèses, on avait la quantité $\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}LM + \frac{1}{2}lm$, le solide en question serait égal à la moitié de la somme des deux surfaces ABLM, *ablm*, multipliée par l'épaisseur Bb; car (151) la surface ABLM est égale à $BC \times (\frac{1}{2}AB + CD + EF + GH + IK + \frac{1}{2}LM)$ et la surface *ablm* est, par la même raison, égale à bc ou $BC \times (\frac{1}{2}ab + cd + ef + gh + ik + \frac{1}{2}lm)$; donc la moitié de la somme de ces deux surfaces multipliées par l'épaisseur Bb, serait $\frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}ab + CD + cd + EF + ef + GH + gh + IK + ik + \frac{1}{2}LM + \frac{1}{2}lm)$: donc le solide en question ne diffère de ce produit que de la quantité dont $\frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{3}AB + \frac{2}{3}ab + \frac{2}{3}LM + \frac{1}{3}lm)$ surpasse la quantité $\frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}LM + \frac{1}{2}lm)$; or, il est aisé de voir (*Arith.*, 103) que cette différence est $\frac{Bb \times BC}{2} + (\frac{1}{6}ab - \frac{1}{6}AB + \frac{1}{6}LM - \frac{1}{6}lm)$; donc le solide cherché est égal à $\frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}ab + CD + cd + EF + ef + GH + gh + IK + ik + \frac{1}{2}LM + \frac{1}{2}lm) + \frac{Bb \times BC}{2} \times (\frac{1}{6}ab - \frac{1}{6}AB + \frac{1}{6}LM - \frac{1}{6}lm)$; or, il est aisé de remarquer que $\frac{1}{6}ab - \frac{1}{6}AB + \frac{1}{6}LM - \frac{1}{6}lm$ est une quantité fort petite en comparaison de celle qui est entre les deux premières parenthèses, puisque les deux plans ABLM, *ablm*, étant supposés peu distants, la différence de AB à *ab* et

celle de LM à *lm* ne peuvent être que de fort petites quantités ; on peut donc réduire la valeur de ce solide à $\frac{Bb + BC}{2}$ $\times (\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}ab + CD + cd + EF + ef + GH + gh + IK + ik + \frac{1}{2}LM + \frac{1}{2}lm)$, c'est-à-dire à $Bb \times \left(\frac{ABLM + ablm}{2}\right)$.

On peut donc dire que, pour avoir la solidité d'une tranche de solides comprise entre deux surfaces planes parallèles, de telle figure qu'on voudra, et peu distantes l'une de l'autre, il faut multiplier la moitié de la somme de ces deux surfaces par l'épaisseur de cette tranche.

255. Si l'épaisseur B*b* de la tranche était trop considérable pour qu'on pût regarder A*a*, D*d* comme des lignes droites, il faudrait concevoir le solide partagé en plusieurs tranches d'égale épaisseur, par des plans parallèles à l'une des surfaces ABLM, *ablm*, et mesurant ces surfaces ABLM, *ablm* et leurs parallèles, on aurait la solidité en ajoutant toutes les surfaces intermédiaires et la moitié de la somme des deux extrêmes ABLM, *ablm*, et multipliant le tout par l'épaisseur d'une des tranches; c'est une suite immédiate de ce que nous venons de dire.

Du Toisé des Solides.

256. Après ce que nous avons dit (**155**) sur le toisé des surfaces, il doit y avoir fort peu de chose à dire sur le toisé des solides.

Pour évaluer un solide en toises cubes et parties de la toise cube, on peut s'y prendre de deux manières principales. La première est de compter par toises cubes et par parties cubes de la toise cube, c'est-à-dire par toises cubes, pieds cubes, pouces cubes, etc.

La *toise cube* ou *cubique* contient 216 pieds cubes, parce que c'est un cube qui a 6 pieds de long, 6 pieds de large et 6 pieds de haut.

Le *pied cube* contient 1728 pouces cubes, parce que c'est un

cube qui a 12 pouces de long sur 12 pouces de large, et 12 pouces de haut.

Par la même raison, on voit que le *pouce cube* contient 1728 lignes cubes, et ainsi de suite.

257. Donc, pour évaluer un solide en toises cubes et parties cubes de la toise cube, il faudra réduire chacune de ses trois dimensions à la plus petite espèce; multiplier deux de ces dimensions ainsi réduites l'une par l'autre, et le produit résultant par la troisième; et pour réduire en lignes cubes, pouces cubes, pieds cubes et toises cubes, en supposant que la plus petite espèce ait été des points, on divisera successivement par 1728, 1728, 1728 et 216; ou seulement par 1728, 1728 et 216, si la plus petite espèce est seulement des lignes, et ainsi de suite.

Par exemple, si l'on a un parallélipipède qui ait $2^{T}4^{P}8^{p}$ de long, $1^{T}3^{P}$ de large, et $3^{T}5^{P}7^{p}$ de haut, on réduira ces trois dimensions à 200^{p}, 108^{p} et 283^{p}, qui, étant multipliées, savoir 200 par 108, et le produit 21600^{PP} par 283^{p}, donneront 6112800 pouces cubes, ou 6112800^{PPP}; divisant donc par 1728, on aura 3537 pieds cubes, ou 3537^{PPP}, et 864 de reste, c'est-à dire 864^{PPP}; divisant 3537^{PPP} par 216, on aura 16 toises cubes ou 16^{TTT} et 81^{PPP}; en sorte que le parallélipipède en question contient $16^{TTT}81^{PPP}864^{PPP}$.

258. Dans la seconde manière d'évaluer les solides en toises cubes et parties de la toise cube, on se représente la toise cube partagée en six parallélipipèdes, qui ont tous une toise carrée de base sur un pied de haut, et que pour cette raison on appelle *toise-toise-pieds*. On conçoit de même la toise-toise-pied partagée en douze parallélipipèdes, qui ont chacun une toise carrée de base et un pouce de haut, et qu'on appelle *toise-toise-pouces;* on subdivise de même chacune de celles-ci en douze parallélipipèdes, qui ont chacun une toise carrée de base sur une ligne de haut, et l'on continue de subdiviser en parallélipipèdes qui ont constamment une toise carrée de base sur un point, une prime, une seconde, etc., de haut, en sorte que les subdivisions sont absolument analogues à celles de la toise linéaire,

comme nous avons vu que l'étaient celles de la toise carrée ; et les noms de ces différentes subdivisions ne diffèrent de ceux qui sont relatifs à la toise carrée, qu'en ce que le mot *toise* y est énoncé deux fois.

Les multiplications relatives à cette division de la toise cube sont absolument les mêmes que celles que nous avons enseignées relativement à la toise carrée.

A l'égard de la nature des unités des facteurs, on doit regarder l'un d'entre eux comme exprimant des toises cubes, toise-toise-pieds, toise-toise-pouces, etc., et les deux autres comme marquant des nombres abstraits dont le produit exprimera combien de fois on doit répéter ce premier facteur. Par exemple, en reprenant le parallélipipède que nous venons de calculer ci-dessus, et supposant que la longueur AD (*fig.* 139) est de $2^T 4^P 8^p$, la largeur AB de $1^T 3^P$ et la hauteur AL de $3^T 5^P 7^p$; si l'on prend AI et AE chacun d'une toise, et qu'on se représente le parallélipipède AIFEHGKD, il est visible que ce parallélipipède est de $2^{TTT} 4^{TPP} 8^{TTp}$, puisqu'il a une toise carrée de base sur une longueur de $2^T 4^P 8^p$. Or, pour avoir la solidité du parallélipipède total, on voit qu'il faut répéter ce parallélipipède partiel autant de fois que sa largeur AI est contenue dans la largeur AB, c'est-à-dire une fois et demie, ou autant que le marque $1^T 3^P$; puis répéter ce produit autant de fois que la hauteur AE est contenue dans la hauteur AL, c'est-à-dire autant de fois que le marque $3^T 5^P 7^p$, considéré comme nombre abstrait.

Mais pour se guider plus aisément dans ces multiplications, on laissera aux facteurs les signes de la toise tels qu'ils les ont ; il suffit de savoir que le produit doit être des toises cubes, toise-toise-pieds, etc. ; ainsi, en opérant comme au toisé des surfaces, on trouvera comme il suit :

2^{T}	4^{P}	8^{p}	
1^{T}	3^{P}		
2^{TT}	0^{TP}	0^{Tp}	
0	3		
0	1		
0	0	4	
0	0	4	
1	2	4	
4^{TT}	1^{TP}	0^{Tp}	
3^{T}	5^{P}	7^{P}	
12^{TTT}	0^{TTP}	0^{TTp}	0^{TTl}
0	3	0	
2	0	6	
0	4	2	
0	4	2	
0	2	1	
0	0	4	
16^{TTT}	2^{TTP}	3^{TTp}	2^{TTl}

289. Il est aisé de convertir ces parties de la toise en parties cubes, c'est-à-dire pieds cubes, pouces cubes, etc. Il faut écrire sous les parties de la toise, à commencer des toise-toise-pieds, les nombres 36, 3, $\frac{1}{4}$; 36, 3, $\frac{1}{4}$ consécutivement, et multiplier chaque nombre supérieur par son correspondant inférieur; porter les produits des nombres 36, 3, $\frac{1}{4}$ chacun au-dessous du premier de ces nombres; et lorsqu'en multipliant par $\frac{1}{4}$, il restera 1 ou 2 ou 3, on écrira sous le nombre 36 suivant, 432 ou 864 ou 1296, pour commencer une seconde colonne. Appliquant ceci à l'exemple que nous venons de donner,

16^{TTT}	2^{TTP}	3^{TTp}	2^{TTl}	0^{TTpt}
	36	3	$\frac{1}{4}$	36
16^{TTT}	72^{PPP}			864^{P}
	9			
18^{TTT}	81^{PPP}	864^{ppp}		

on trouve le même produit que par la première méthode.

On multiplie les toise-toise-pieds par 36, parce que la toise-toise-pied ayant un pied de haut sur une toise carrée ou 36 pieds carrés de base, doit contenir 36 pieds cubes.

La toise-toise-pouce étant la douzième partie de la toise-toise-pied, doit contenir la douzième partie de 36 pieds cubes, c'est-à-dire 3 pieds cubes; il faut donc multiplier par 3 les toise-toise-pouces. Pareillement, la toise-toise-ligne étant la douzième partie de la toise-toise-pouce, doit contenir la douzième partie de 3 pieds cubes ou un quart de pied cube, ou (à cause que le pied cube vaut 1728 pouces cubes) elle doit contenir 432^{ppp}; en raisonnant de même, on voit que la toise-toise-point vaudrait 36^{ppp}, parce qu'elle est la douzième partie de la toise-toise-ligne qui vaut 432^{ppp}, dont la douzième partie est 36; donc, etc.

Donc, réciproquement, pour ramener les parties cubes de la toise cube à des toise-toise-pieds, toise-toise-pouces, etc., il faudra diviser par 36 le nombre des pieds cubes, et l'on aura les toise-toise-pieds: on divisera le reste de cette division par 3, et l'on aura les toise-toise-pouces. On multipliera par 4 le reste de cette seconde division, et au produit on ajoutera 1, ou 2, ou 3 unités, selon que le nombre des pouces cubes sera entre 432 et 864, ou 864 et 1296, ou 1296 et 1728, et l'on aura les toise-toise-lignes; puis retranchant du nombre des pouces cubes le nombre 432, ou 864, ou 1296, selon qu'on aura ajouté 1, ou 2, ou 3 unités, on opérera sur le reste comme on a opéré sur les pieds cubes, et l'on aura consécutivement les toise-toise-points, les toise-toise-primes, et les toise-toise-secondes; enfin on continuera de la même manière pour les lignes cubes, etc.

Par exemple, si l'on demande de réduire en toise-toise-pieds, toise-toise-pouces, etc., le nombre $47^{TTT}\,52^{PPP}\,932^{ppp}$, je divise 52 par 36, et j'ai 1^{TTP}, et un reste de 16; je divise celui-ci par 3 et j'ai 5^{TTp}, et un reste de 1; je quadruple ce reste, et j'y ajoute 2 unités, parce que le nombre des pouces cubes est entre 864 et 1296, et j'ai 6^{TTl}. Retranchant 864 de 932, il reste

68; je le divise par 36, et j'ai 1^{TTpt}, et 32 de reste ; je divise celui-ci par 3, et j'ai $10^{TT'}$, et 2 de reste; je quadruple ce reste, et j'ai $8^{TT''}$; en sorte que j'ai, en total, $47^{TTT}\,1^{TTP}\,5^{TTp}\,1^{TTpt}$ $10^{TT'}\,8^{TT''}$.

260. Puisque pour avoir la solidité d'un prisme, il faut multiplier la surface de sa base par sa hauteur, il s'ensuit que si, connaissant la solidité et la base ou la hauteur, on veut avoir la hauteur ou la base, il faut diviser la solidité par celui de ces deux facteurs que l'on connaîtra. Mais il faut observer que, dans l'exactitude, ce n'est point véritablement la solidité que l'on divise par la surface ou par la hauteur, mais c'est un solide que l'on divise par un solide. En effet, d'après ce qui a été dit ci-dessus, on voit que, lorsqu'on évalue un solide, on répète un autre solide de même base autant de fois que la hauteur de celui-ci est contenue dans la hauteur du premier, ou bien on répète un solide de même hauteur autant de fois que la surface de la base de celui-ci est comprise dans la base de celui-là. Donc, quand on voudra, connaissant la solidité et la surface de la base, par exemple, connaître la hauteur, il faudra chercher combien de fois la solidité proposée contient celle d'un solide de même base; et le quotient marquera, par le nombre de ses unités, le nombre des parties de la hauteur.

Cela posé, si ayant, par exemple, un prisme dont la solidité soit de $16^{TTT}\,2^{TTP}\,3^{TTp}\,2^{TTl}$, et la surface de la base $12^{TT}\,0^{TP}\,0^{Tp}$, on veut savoir quelle est la hauteur, on considérera le diviseur non pas comme $12^{TT}\,0^{TP}\,0^{Tp}$, mais comme $12^{TTT}\,0^{TTP}\,0^{TTp}$, et alors la question se réduira à diviser $16^{TTT}\,2^{TTP}\,3^{TTp}\,2^{TTl}$ par $12^{TTT}\,0^{TTP}\,0^{TTp}$; mais comme la toise carrée est facteur commun, le quotient sera le même que si le dividende et le diviseur marquaient des toises linéaires; on aura donc simplement 16^{T} $2^{P}\,3^{p}\,2^{l}$ à diviser par $12^{T}\,0^{P}\,0^{p}$, c'est-à-dire par 12^{T}; et comme la nature de la question fait voir que le quotient doit être des toises linéaires, la division se fera donc selon la règle prescrite (*Arith.*, **124** et suiv.).

Si la solidité et la hauteur étant données, on cherche quelle

doit être la surface de la base; par exemple, si la solidité est de $16^{TTT}2^{TTp}3^{TTp}2^{TTl}$, et la hauteur de $2^{T}4^{p}8^{p}$, on considérera le diviseur comme étant $2^{TTT}4^{TTp}8^{TTp}$; et par la même raison que dans le cas précédent, l'opération se réduira à diviser $16^{T}2^{p}3^{p}2^{l}$ par $2^{T}4^{p}8^{p}$; mais comme le quotient doit évidemment être une surface, on le comptera, non pas pour des toises linéaires, mais pour des toises carrées, toise-toise-pieds, etc. Du reste, il n'y aura aucune différence dans la manière de faire l'opération, qui se fera toujours en vertu des règles données (*Arith.*, **124** et suiv.), c'est-à-dire qu'après avoir trouvé le quotient, comme s'il devait exprimer des toises linéaires, on affectera le signe de chaque partie, de la lettre T. Par exemple, dans le cas présent, on trouverait pour quotient $5^{T}5^{p}4^{p}6^{l}$; on écrira donc $5^{TT}5^{Tp}4^{Tp}6^{Tl}$.

Si la solidité était donnée en toises cubes et parties cubes de la toise cube, on la convertirait en toises cubes, toise-toise-pieds, etc., par ce qui a été dit (**259**), et l'opération serait ramenée au cas précédent.

Du Toisé des Bois.

261. Ce qu'on vient de dire du toisé en général ne nous laisse que fort peu de chose à dire sur le toisé des bois.

Dans la marine, on mesure les bois en pieds cubes et parties cubes du pied cube; ainsi il ne s'agit que de mesurer les dimensions en pieds et parties du pied, et les ayant multipliées (après les avoir réduites à la plus petite espèce), on réduira en lignes cubes, pouces cubes, pieds cubes, comme il a été dit ci-dessus, mais en s'arrêtant aux pieds cubes.

Dans les bâtiments civils et les fortifications, l'usage est de réduire en solives.

Par *solive*, on entend un parallélipipède de 2 toises de haut sur 6 pouces d'équarrissage, ou 36 pouces carrés de base; ce qui est équivalent à un parallélipipède d'une toise de haut sur un demi-pied carré ou 72 pouces carrés de base, et qui par conséquent contient 3 pieds cubes.

On partage la solive en six parties, chacune d'un pied de haut et de 72 pouces carrés de base, et chacune de ces parties s'appelle *pied de solive*. On partage de même le pied de solive en douze parties d'un pouce de haut et 72 pouces carrés de base chacune, qu'on appelle *pouces de solive*, et ainsi de suite.

Puisque la solive contient 3 pieds cubes, ou la 72[e] partie d'une toise cube, et que ses subdivisions sont les mêmes que celles de la toise cube en toise-toise-pieds, etc., il s'ensuit que le nombre qui exprimerait un solide quelconque en solives et parties de solive est 72 fois plus grand que celui qui l'exprimerait en toises cubes, toise-toise-pieds, etc.

Ainsi, pour évaluer la solidité d'un corps en solives, il n'y a qu'à l'évaluer en toises cubes, toise-toise-pieds, etc., et multiplier ensuite le produit par 72. Mais on peut éviter cette multiplication en faisant une réflexion assez simple. Il n'y a qu'à regarder l'une des dimensions comme douze fois plus grande, c'est-à-dire regarder les lignes comme exprimant des pouces, les pouces comme exprimant des pieds, et ainsi de suite ; regarder pareillement une autre des trois dimensions comme six fois plus grande, ou les lignes comme exprimant des demi-pouces, les pouces comme exprimant des demi-pieds ; alors, multipliant ces deux nouvelles dimensions entre elles, et le produit par la troisième, on aura tout de suite la solidité en solives, pieds de solive, etc. Par exemple, si l'on a une pièce de bois de $8^T 5^P 6^p$ de long sur $1^P 7^p$ de large, et $1^P 5^p$ d'épaisseur ; au lieu de $1^P 7^p$, je prends $3^T 1^P$, c'est-à-dire douze fois plus, et au lieu de $1^P 5^p$, je prends $1^T 2^P 6^p$, c'est-à-dire six fois plus ; et multipliant $8^T 5^P 6^p$ par $3^T 1^P$, puis le produit par $1^T 2^P 6^p$, je trouve $40^{TTT} 0^{TTP} 0^{TTp} 1^{TTl}$ qu'il faut compter pour $40^{sol} 0^P 0^p 1^l$, dont les pieds, pouces, etc., sont des pieds, pouces, etc., de solive.

Des rapports des solides en général.

262. *Comparer deux solides*, c'est chercher combien de fois le nombre de mesures d'une certaine espèce, contenues dans

l'un de ces solides, contient le nombre de mesures de même espèce contenues dans l'autre.

263. *Deux prismes, ou deux cylindres, ou un prisme et un cylindre, sont entre eux comme les produits de leur base par leur hauteur.* Cela est évident, puisque chacun de ces solides est égal au produit de sa base par sa hauteur, quelle que soit d'ailleurs la figure de la base.

Donc *les prismes ou les cylindres, ou les prismes et les cylindres de même hauteur, sont entre eux comme leurs bases; et les prismes et les cylindres de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.* Car le rapport des produits des bases par les hauteurs ne change point, lorsqu'on y omet le facteur commun qui s'y trouve, lorsque la base ou la hauteur se trouve être la même dans les deux solides.

Donc *deux pyramides quelconques, ou deux cônes, ou une pyramide et un cône, sont dans le rapport des hauteurs, lorsque les bases sont égales;* car ces solides sont chacun le tiers d'un prisme de même base et de même hauteur (**240**).

264. *Les solidités des pyramides semblables sont entre elles comme les cubes des hauteurs de ces pyramides, ou en général, comme les cubes de deux lignes homologues de ces pyramides.*

Car deux pyramides semblables peuvent être représentées par deux pyramides telles que IABCDF, I*abcdf* (*fig.* 115), puisque ces deux pyramides sont composées d'un même nombre de faces semblables chacune à chacune, et semblablement disposées. Puis donc que deux pyramides sont en général comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs, les bases qui sont ici des figures semblables, étant entre elles comme les carrés des hauteurs IP, I*p* (**202**), les deux pyramides seront entre elles comme les produits des carrés des hauteurs par les hauteurs mêmes; car on pourra (**99**) substituer au rapport des bases celui des carrés des hauteurs. Et puisque (**213**) les hauteurs sont proportionnelles à toutes les autres dimensions homologues, leurs cubes seront donc aussi proportionnels aux cubes de ces dimensions homologues (*Arith.*, **191**); donc, en général, deux pyra-

mides semblables sont entre elles comme les cubes de leurs dimensions homologues.

268. Donc, *en général, les solidités de deux corps semblables sont entre elles comme les cubes des lignes homologues de ces solides.* Car les solides semblables peuvent être partagés en un même nombre de pyramides semblables chacune à chacune; et comme deux quelconques de ces pyramides semblables seront entre elles en même rapport, puisqu'elles sont entre elles comme les cubes de leurs dimensions homologues, lesquelles sont en même rapport que deux autres dimensions homologues quelconques, il s'ensuit que la somme des pyramides du premier solide sera à la somme des pyramides du second, aussi dans le même rapport des cubes des dimensions homologues.

Donc *les solidités des sphères sont entre elles comme les cubes de leurs rayons ou de leurs diamètres.*

Donc, en se rappelant tout ce qui a précédé, on voit, 1° que les contours des figures semblables sont dans le rapport simple des lignes homologues; 2° que les surfaces des figures semblables sont entre elles comme les carrés des côtés ou des lignes homologues; 3° que les solidités des corps semblables sont entre elles comme les cubes des lignes homologues.

Ainsi, si deux corps semblables, deux sphères par exemple, avaient leurs diamètres dans le rapport de 1 à 3, les circonférences de leurs grands cercles seraient aussi dans le rapport de 1 à 3; les surfaces de ces sphères seraient comme 1 à 9, et les solidités comme 1 à 27, c'est-à-dire que la circonférence d'un des grands cercles de la première vaudrait trois fois celle d'un des grands cercles de la seconde; la surface de la première vaudrait neuf fois celle de la seconde, et enfin la première sphère vaudrait 27 sphères telles que la seconde.

Donc, pour faire un solide semblable à un autre, et dont la solidité soit à celle de celui-ci dans un rapport donné, par exemple dans celui de 2 à 3, il faut lui donner des dimensions telles, que le cube de l'une quelconque de ces dimensions soit au cube d'une dimension homologue du solide au-

quel il doit être semblable, comme 2 est à 3. Par exemple, si l'on a une sphère qui ait 8 pouces de diamètre, et qu'on demande quel doit être le diamètre d'une sphère qui en serait les deux tiers, il faudra chercher le quatrième terme de cette proportion, $1 : \frac{2}{3}$ ou $3 : 2 ::$ le cube de 8, c'est-à-dire $:: 512$ est à un quatrième terme. Ce quatrième terme, qui est $341\frac{1}{3}$, sera le cube du diamètre cherché: c'est pourquoi, tirant la racine cubique (*Arith.*, 139), on aura $6^p,99$ pour ce diamètre, c'est-à-dire 7^p à très-peu près, ce qu'on peut vérifier aisément en cette manière. Cherchons quelles sont les solidités de deux sphères, l'une de 8 pouces, l'autre de 7 pouces de diamètre. La circonférence de leur grand cercle se trouvera par ces deux proportions (182),

$$7 : 22 :: 8 :$$
$$7 : 22 :: 7 :$$

Les quatrièmes termes sont $25\frac{1}{7}$ et 22; multipliant ces circonférences chacune par son diamètre, on aura (222) les surfaces de ces sphères, lesquelles seront par conséquent $201\frac{1}{7}$ et 154; enfin, multipliant ces surfaces par le tiers de leurs rayons, c'est-à-dire respectivement par le sixième de 8 et de 7, on aura pour les solidités $268\frac{4}{21}$ et $179\frac{2}{3}$, dont le rapport est le même que celui de $\frac{5632}{21} : \frac{539}{3}$, en réduisant en fractions, ou en multipliant les deux termes de la dernière fraction par 7, et supprimant le dénominateur commun, le même que de 5632 à 3773; or (*Arith.*, 167), le rapport de ces deux quantités est $1\frac{1859}{3773}$, c'est-à-dire, en réduisant en décimales, 1,49; et le rapport de 3 à 2 est 1,5 ou 1,50 (*Arith.*, 30); la différence n'est donc que d'un centième: cette différence vient de ce que le diamètre n'est calculé qu'à peu près; d'ailleurs le rapport de 7 à 22 n'est pas exactement celui du diamètre à la circonférence.

Dans les corps composés de la même matière, les poids sont proportionnels à la quantité de matière ou à la solidité; ainsi, connaissant le poids d'un boulet d'un diamètre connu, pour trouver celui d'un boulet d'un autre diamètre et de la même

matière, il faut faire cette proportion: Le cube du diamètre du boulet dont le poids est connu, est au cube du diamètre du second, comme le poids du premier est à un quatrième terme qui sera le poids du second.

Nous avons vu (162) que dans deux vaisseaux parfaitement semblables, les voilures seraient comme les carrés des hauteurs des mâts, et par conséquent, avons-nous dit, comme les carrés des longueurs des navires, parce que toutes les dimensions homologues des solides semblables sont en même rapport. Or, on voit ici que les poids des solides semblables et de même matière sont comme les cubes des dimensions homologues; on voit donc que si deux navires semblables étaient mâtés proportionnellement, les quantités de vent qu'ils pourraient recevoir seraient comme les carrés de leur longueur, tandis que les poids seraient comme les cubes; et comme la raison des carrés n'est pas la même, et est plus petite que celle des cubes, ainsi qu'il est facile de s'en convaincre, cette seule considération fait voir que la voilure qui serait propre pour un certain navire ne le serait pas pour un navire plus petit, si l'on diminuait proportionnellement les deux dimensions de cette voilure. Il y a encore d'autres considérations à faire entrer dans l'examen de cette question, qui appartient proprement à la Mécanique. Nous ne nous proposons ici que de préparer les esprits à prévoir les usages qu'on peut faire des principes établis jusqu'ici, pour la discussion de ces sortes de questions.

DE LA TRIGONOMÉTRIE.

266. Le mot *Trigonométrie* signifie mesure des triangles. Mais on comprend généralement sous ce nom l'art de déterminer les positions et les dimensions des différentes parties de l'étendue par la connaissance de quelques-unes de ces parties.

Si l'on conçoit que les différents points qu'on se représente dans un espace quelconque soient joints les uns aux autres par des lignes droites, il se présente trois choses à considérer : 1° la longueur de ces lignes; 2° les angles qu'elles forment entre elles; 3° les angles que forment entre eux les plans dans lesquels ces lignes sont ou peuvent être imaginées comprises. C'est de la comparaison de ces trois objets que dépend la solution de toutes les questions qu'on peut proposer sur la mesure de l'étendue et de ses parties, et l'art de déterminer toutes ces choses par la connaissance de quelques-unes d'entre elles se réduit à la résolution de ces deux questions générales :

1°. Connaissant trois des six choses, angles et côtés, qui entrent dans un triangle rectiligne, trouver les trois autres, lorsque cela est possible ;

2°. Connaissant trois des six choses qui composent un triangle sphérique, c'est-à-dire un triangle formé sur la surface d'une sphère par trois arcs de cercle qui ont tous trois pour centre le centre de cette même sphère, trouver les trois autres, lorsque cela est possible.

La première question est l'objet de la Trigonométrie qu'on nomme *Trigonométrie plane*, parce que les six choses qu'on y considère sont dans un même plan : on la nomme aussi *Trigonométrie rectiligne*.

La seconde question appartient à la *Trigonométrie sphérique*. Les six choses qu'on y considère sont dans des plans différents, comme nous le verrons par la suite.

De la Trigonométrie plane ou rectiligne.

267. La *Trigonométrie plane* est une partie de la Géométrie qui enseigne à déterminer ou à calculer trois des six parties d'un triangle rectiligne par la connaissance des trois autres parties, lorsque cela est possible.

Je dis lorsque cela est possible, parce que si l'on ne connaissait que les trois angles, par exemple, on ne pourrait pas déterminer les côtés. En effet, si par un point D pris à volonté sur le côté AB du triangle ABC (*fig.* 140), dont je suppose qu'on connaisse les trois angles, on mène DE parallèle à BC, on aura un autre triangle ADE qui aura les mêmes angles que le triangle ABC (37); et on voit qu'on en peut former ainsi une infinité d'autres qui auront les mêmes angles. Il faudrait donc que le calcul donnât tout à la fois une infinité de côtés différents.

La question est donc alors absolument indéterminée.

Nous verrons cependant que si l'on ne peut déterminer les valeurs des côtés, on peut du moins déterminer leur rapport.

Mais lorsque parmi les trois choses connues ou données il entrera un côté, on peut toujours déterminer tout le reste. Il y a cependant un cas où il reste quelque chose d'indéterminé: le voici. Supposé que dans le triangle ABC (*fig.* 141) on connaisse les deux côtés AB et BC, et l'angle A opposé à l'un de ces côtés, on ne peut déterminer la valeur de l'angle C, ni celle du côté AC, qu'autant qu'on saura si cet angle C est aigu ou obtus; en effet, si l'on conçoit que du point B comme centre, et d'un rayon égal au côté BC, on ait décrit un arc CD, et que du point D, où cet arc rencontre AC, on ait tiré BD, on aura un nouveau triangle ABD, dans lequel on connaîtra les mêmes choses qu'on connaît dans le triangle ABC; savoir l'angle A, le côté AB, et le côté BD égal à BC: on a donc ici les mêmes choses pour déterminer l'angle BDA, qu'on avait dans le triangle ABC pour déterminer l'angle C.

Mais il y a cette différence entre ce cas-ci et le précédent, qu'on peut ici assigner la valeur de l'angle C et de l'angle BDA comme nous le verrons ci-après : la seule chose qui soit déterminée, c'est de savoir laquelle de ces deux valeurs on doit adopter, et par conséquent quelle figure doit avoir le triangle. Il faut donc, outre les trois choses données, savoir encore si l'angle cherché doit être aigu ou obtus. Au reste, on peut remarquer en passant que les deux angles C et BDA dont il s'agit, sont supplément l'un de l'autre ; car BDA est supplément de BDC qui est égal à l'angle C, parce que le triangle BDC est isocèle.

268. Ce ne sont pas les angles mêmes qu'on emploie dans le calcul des triangles ; on substitue aux angles des lignes qui, sans leur être proportionnelles, sont néanmoins propres à représenter ces angles, et sont d'ailleurs plus commodes à employer dans le calcul, parce que, comme nous le verrons ci-après, elles sont proportionnelles aux côtés de triangles : il convient donc, avant que d'aller plus loin, de faire connaître ces lignes, et de faire voir comment elles peuvent tenir lieu des angles.

Des Sinus, Cosinus, Tangentes, Cotangentes, Sécantes, et Cosécantes.

269. La perpendiculaire AP (*fig.* 142) abaissée de l'extrémité d'un arc AB sur le rayon BC qui passe par l'autre extrémité B de cet arc, s'appelle le *sinus droit*, ou simplement le *sinus* de l'arc AB ou de l'angle ACB.

La partie BP du rayon, comprise entre le sinus et l'extrémité de l'arc, s'appelle le *sinus-verse*.

La partie BD de la perpendiculaire à l'extrémité du rayon, interceptée entre ce rayon BC et le rayon CA prolongé, s'appelle la *tangente* de l'arc AB ou de l'angle ACB.

La ligne CD, qui n'est autre chose que le rayon CA prolongé jusqu'à la tangente, s'appelle *sécante* de l'arc AB ou de l'angle ACB.

Si l'on mène le rayon CF perpendiculaire à CB, et à son extrémité F la perpendiculaire FE qui rencontre en E le rayon CA

prolongé, et qu'enfin on mène AQ perpendiculaire sur CF; il suit des définitions précédentes, que AQ sera le sinus, FQ le sinus-verse, FE la tangente, et CE la sécante de l'arc AF ou de l'angle ACF.

Mais comme l'angle ACF est complément de ACB, puisque ces deux angles font ensemble un angle droit, on peut dire que AQ est le sinus du complément FQ, le sinus-verse du complément FE, la tangente du complément, et CE la sécante du complément de l'arc AB ou de l'angle ACB.

Pour abréger ces dénominations, on est convenu de dire *cosinus*, au lieu de sinus du complément; *cosinus-verse*, au lieu de sinus-verse du complément; *cotangente*, au lieu de tangente du complément, et *cosécante*, au lieu de sécante du complément. En sorte que les lignes AQ, FQ, FE, CE seront dites le cosinus, le cosinus-verse, la cotangente, et la cosécante de l'arc AB ou de l'angle ACB; de même, les lignes AP, BP, BD et CD pourront être dites le cosinus, le cosinus-verse, la cotangente, et la cosécante de l'arc AF ou de l'angle ACF; car AB est complément de AF, comme AF l'est de AB.

Pour désigner ces lignes, lorsqu'il sera question d'un angle ou d'un arc, nous mettrons devant les lettres qui servent à nommer cet angle ou cet arc, les expressions abrégées *sin*, *cos*, *tang*, *cot*; ainsi *sin* AB signifiera le sinus de l'arc AB; *sin* ACB signifiera le sinus de l'angle ACB; de même, *cos* AB, *cos* ACB signifieront le cosinus de l'arc AB, le cosinus de l'angle ACB; et pour désigner le rayon nous prendrons la lettre R.

270. Il est évident, 1°. *que le cosinus* AQ *d'un arc quelconque* AB *est égal à la partie* CP *du rayon comprise entre le centre et le sinus;*

2°. Que *le sinus-verse* BP *est égal à la différence entre le rayon et le cosinus;*

3°. Que *le sinus d'un arc quelconque* AB *est la moitié de la corde* AG *d'un arc double,* ABG. Car le rayon CB étant perpendiculaire sur la corde AG, divise cette corde et son arc en deux parties égales (82).

271. De cette dernière proposition, il suit que le *sinus* de 30° *vaut la moitié du rayon;* car il doit être la moitié de la corde de 60°, ou du côté de l'hexagone, que nous avons vu (93) être égal au rayon.

272. *La tangente de 45° est égale au rayon.* Car si l'angle ACB est de 45°, comme l'angle CBD est droit, l'angle CDB vaudra aussi 45°; le triangle CBD sera donc isocèle, et par conséquent BD sera égal à CB.

273. A mesure que l'arc AB ou l'angle ACB augmente, son sinus AP augmente, et son cosinus AQ ou CP diminue jusqu'à ce que l'arc AB soit devenu de 90°; alors le sinus AP devient FC, c'est-à-dire égal au rayon, et le cosinus est zéro, parce que le point A tombant en F, la perpendiculaire AQ devient zéro.

A l'égard de la tangente BD et de la cotangente FE, il est visible que la tangente BD augmente continuellement, et que la cotangente au contraire diminue; mais l'une et l'autre, de manière que quand l'arc AB est devenu de 90°, sa tangente est infinie, et sa cotangente est zéro: en effet, plus l'arc AB devient grand, plus le point D s'élève au-dessus de BC; et quand le point A est infiniment près de F, les deux lignes CD et BD sont presque parallèles, et ne se rencontrent plus qu'à une distance infinie; donc BD est alors infinie; donc elle l'est quand le point A tombe sur le point F.

274. Ainsi, *pour l'arc de 90°, le sinus est égal au rayon, le cosinus est zéro, la tangente est infinie, et la cotangente est zéro.*

Comme le sinus de 90° est le plus grand de tous les sinus, on l'appelle, pour le distinguer des autres, *sinus total;* en sorte que ces trois expressions, le *sinus de* 90°, *le rayon, le sinus total,* signifient la même chose.

275. Lorsque l'arc AB passe 90° (*fig.* 143), son sinus AP diminue, et son cosinus AQ ou CP, qui tombe alors au delà du centre par rapport au point B, augmente jusqu'à ce que l'arc AB soit devenu de 180°; auquel cas le sinus est zéro, et le cosinus est égal au rayon. On voit aussi que le sinus AP, et le cosi-

nus CP de l'arc AB, ou de l'angle ACB plus grand que 90°, appartiennent en même temps à l'arc AH ou à l'angle ACH moindre que 90° et supplément de celui-là; de sorte que, *pour avoir le sinus et le cosinus d'un angle obtus, il faut prendre le sinus et le cosinus de son supplément*. Mais il faut bien remarquer que le cosinus tombe du côté opposé à celui où il tomberait, si l'arc AB ou l'angle ACB était moindre que 90°.

A l'égard de la tangente, comme elle est déterminée (**269**) par la rencontre de la perpendiculaire BD (*fig.* 142) avec le rayon CA prolongé, il est visible que lorsque l'arc AB (*fig.* 143) est de plus de 90°, elle est alors BD; mais en élevant la perpendiculaire HI, il est aisé de voir que le triangle CBD est égal au triangle CHI, et que par conséquent BD est égal à HI.

276. Donc *la tangente d'un arc ou d'un angle plus grand que 90° est la même que celle du supplément de cet arc:* toute la différence qu'il y a, c'est qu'elle tombe au-dessous du rayon BC. Pour la cotangente EF, elle est aussi la même que la cotangente du supplément; et elle tombe aussi du côté opposé à celui où elle tomberait, si l'arc AB ou l'angle ACB était moindre que 90°. On voit encore, et par la même raison que ci-dessus, que pour 180°, la tangente est zéro, et la cotangente infinie.

277. Ces notions supposées, concevons que le quart de circonférence BF (*fig.* 142) soit divisé en arcs de 1', c'est-à dire en 5400 parties égales, et que de chaque point de division on abaisse des perpendiculaires ou sinus tels que AP sur le rayon BC; concevons aussi ce rayon BC divisé en un très-grand nombre de parties égales, en 100000 par exemple; chaque perpendiculaire contiendra un certain nombre de ces parties du rayon; si donc, par quelque moyen que ce soit, on pouvait parvenir à déterminer le nombre de parties de chacune de ces perpendiculaires, il est visible que ces lignes pourraient être employées pour fixer la grandeur des angles, en sorte que si, ayant écrit par ordre dans une colonne toutes les minutes depuis zéro jusqu'à 90, on écrivait dans une colonne à côté, et vis-à-vis de chaque minute, le nombre de parties de la perpendiculaire correspondante, on

pourrait, par le moyen de cette Table, assigner quel est le nombre de degrés d'un angle dont le nombre de parties de la perpendiculaire ou du sinus serait connu; et réciproquement, connaissant le nombre des degrés et parties de degré de l'angle, on pourrait assigner le nombre des parties de son sinus. Cette Table aurait cette utilité, non-seulement pour tous les arcs ou angles dont le rayon aurait le même nombre de parties qu'on en aurait supposé à celui d'après lequel on a construit la Table, mais encore pour tout autre dont le rayon serait connu. Par exemple, supposons un angle DCG (*fig.* 144), dont le côté ou rayon CD soit de 8 pieds, et la perpendiculaire DE de 3 pieds; et imaginons que CA soit le rayon sur lequel on a calculé les Tables; si l'on imagine l'arc AB et la perpendiculaire AP, cette perpendiculaire sera le sinus des Tables: or, je puis trouver aisément de combien de parties est cette perpendiculaire; car, comme les triangles CDE, CAP sont semblables à cause des parallèles DE et AP, j'aurai (109) CD : DE :: CA : AP, c'est-à-dire, $8^p : 3^p :: 100000 : AP$; je trouverai donc (*Arith.*, 179) que AP vaut 37500; je n'aurai donc qu'à chercher ce nombre dans la Table parmi les sinus, et je trouverai à côté le nombre des degrés et minutes de l'angle DCG ou DCE.

Réciproquement, si l'on donnait le nombre des degrés et minutes de l'angle DCG et son rayon CD, on déterminerait de même la valeur de la perpendiculaire DE; car sachant quel est le nombre de degrés et minutes de cet angle, on trouverait dans la Table quel est le nombre de parties de la perpendiculaire ou du sinus AP qui répond à ce nombre de degrés; et alors, en vertu des triangles semblables CAP, CDE, on aurait cette proportion CA : AP :: CD : DE, par laquelle il serait facile de calculer DE, puisque les trois premiers termes CA, AP et CD sont connus, savoir, CA et AP par les Tables, et CD est donné en pieds.

On voit par là quelles sont ces lignes que nous avons dit ci-dessus (268) pouvoir être substituées aux angles dans le calcul des triangles; ce sont les sinus.

278. Mais les sinus ne sont pas les seules lignes qu'on emploie,

on fait usage aussi des tangentes, et même des sécantes. Ces lignes sont faciles à calculer quand une fois on a calculé tous les sinus; car, comme le triangle CPA et le triangle CBD (*fig.* 142) sont semblables, on en peut tirer ces deux proportions:

$$CP : PA :: CB : BD,$$

et

$$CP : CA :: CB : BD,$$

c'est-à-dire, en faisant attention que CP est égale à AQ,

$$\cos AB : \sin AB :: R : \text{tang}\, AB,$$

et

$$\cos AB : R :: R : \text{séc}\, AB.$$

Or, on voit que dans chacune de ces deux proportions, les trois premiers termes sont connus, lorsqu'on connaît tous les sinus, puisque le cosinus d'un arc n'est autre chose que le sinus du complément de cet arc: il sera donc aisé d'en conclure (*Arith.*, **179**) la valeur du quatrième terme de chacune, et par conséquent des tangentes et des sécantes, et par conséquent aussi des cotangentes et des cosécantes, qui ne sont autre chose que des tangentes et des sécantes de complément.

279. Au reste, les deux dernières proportions que nous venons d'établir ne sont pas seulement utiles pour le calcul des tangentes et des sécantes, elles sont encore d'un grand usage dans beaucoup de rencontres, comme nous le verrons dans la suite de ce Cours: il faut donc s'appliquer à les retenir; la seconde, par exemple, peut nous fournir encore une propriété, qui est le fondement de la construction des cartes réduites, comme nous le verrons par la suite: voici cette propriété. De même que nous venons de démontrer que $\cos AB : R :: R : \text{séc}\, AB$, on démontrera aussi pour un autre arc quelconque BO, que $\cos BO : R :: R : \text{séc}\, BO$; or, ces deux proportions ayant les mêmes termes moyens, doivent avoir les produits de leurs extrêmes égaux (*Arith.*, **178**); donc on peut (*Arith.*, **180**) former, des extrêmes de l'une et de l'autre, une nouvelle proportion, qui aura pour extrêmes les extrêmes de l'une, et pour moyens les extrêmes de l'autre; en sorte qu'on aura

cos AB : cos BO :: séc BO : séc AB ; d'où l'on conclura que les cosinus de deux arcs sont en raison réciproque ou inverse de leurs sécantes.

280. Voici encore une autre proportion utile dans plusieurs cas, et d'où l'on déduira, de la même manière, que les tangentes de deux arcs sont en raison inverse de leurs cotangentes : les triangles CBD, CFE sont semblables, parceque, outre l'angle droit en B et en F, on a de plus l'angle DCB égal à l'angle CEF, à cause des parallèles CB, EF ; on aura donc BD : CB :: CF : FE, c'est-à-dire tang AB : R :: R : cot AB ; on prouverait donc de même que tang BO : R :: R : cot BO, et par conséquent tang AB : tang BO :: cot BO : cot AB.

Les livres qui renferment les valeurs de toutes les lignes dont il vient d'être question, sont ce qu'on appelle des *Tables de sinus;* elles renferment ordinairement, non-seulement les valeurs numériques de toutes ces lignes, mais encore leurs logarithmes qu'on emploie aussi souvent qu'on le peut à la place des valeurs numériques : ces mêmes Tables renferment aussi les logarithmes des nombres naturels ; telles sont celles que nous avons indiquées (*Arith.*, 239).

Avant que d'exposer les usages de ces Tables, pour la résolution des triangles, il ne nous reste plus qu'à parler de leur formation, c'est-à-dire de la méthode par laquelle on a calculé ou pu calculer les sinus, etc. Nous nous y arrêterons d'autant plus volontiers, que les propositions que nous avons à établir sur ce sujet nous serviront ailleurs.

281. *Pour avoir le cosinus d'un arc dont le sinus est connu, il faut retrancher le carré du sinus du carré du rayon, et tirer la racine carrée du reste.* Car le cosinus AQ (*fig.* 142) est égal à PC qui est côté de l'angle droit dans le triangle rectangle APC, dont on connaît alors l'hypoténuse AC et le côté AP (166.

Ainsi, si l'on demandait le cosinus de 30° ; comme nous avons vu (271) que ce sinus est la moitié du rayon que nous supposerons ici de 100 000 parties, ce sinus serait 50 000 ;

retranchant son carré 2500 000 000 du carré 10 000 000 000 du rayon, on a 7 500 000 000, dont la racine carrée 86603 est le cosinus de 30°, ou le sinus de 60°.

282. *Connaissant le sinus d'un arc* AB (fig. 145), *pour avoir celui de sa moitié,* il faut d'abord calculer le cosinus de ce premier arc : ce cosinus étant calculé, on le retranchera du rayon, ce qui donnera le sinus-verse BP : on carrera la valeur de BP, et on ajoutera ce carré avec celui du sinus AP; la somme (166) sera le carré de la corde AB; tirant la racine carrée de cette somme, on aura AB, dont la moitié est le sinus BI de l'arc BD moitié de AB (270).

283. *Connaissant le sinus* BI *d'un arc* BD (fig. 145), *pour trouver le sinus* AP *du double* ADB *de cet arc,* on calculera le cosinus CI de BD, et l'on en fera cette proportion, R : cos BD :: 2 sin BD : sin ADB, dans laquelle les trois premiers termes seront alors connus, et dont il sera facile de calculer le quatrième.

Cette proposition est fondée sur ce que les deux triangles CBI et BAP sont semblables, parce que, outre l'angle droit en P et en I, ils ont d'ailleurs l'angle B commun; ainsi on a CB : CI :: AB : AP. Or, CI (270) est le cosinus de BD, et AB le double de BI sinus de BD; AP est le sinus de ADB, et CB est le rayon, donc R : cos BD :: 2 sin DB : sin ADB.

284. *Connaissant les sinus de deux arcs* AB, AC (fig. 146), *pour trouver le sinus de leur somme ou de leur différence,* il faut, après avoir calculé (281) les cosinus de ces mêmes arcs, multiplier le sinus du premier par le cosinus du second, et le sinus du second par le cosinus du premier. La somme de ces deux produits, divisée par le rayon, sera le sinus de la somme des deux arcs; et la différence de ces mêmes produits, divisée par le rayon, sera le sinus de la différence de ces mêmes arcs.

Faites l'arc AD égal à l'arc AC, tirez la corde CD, et le rayon LA qui divisera cette corde en deux parties égales au point I; des points C, A, I et D, abaissez les perpendiculaires CK, AG, IH, DF sur BL; enfin, des points I et D, menez IM et DN pa-

rallèles à BL. Puisque CD est divisée en deux parties égales en I, CN sera aussi divisée en deux parties égales en M (**102**).

Cela posé, CK, qui est le sinus de BC somme des deux arcs, est composé de KM et de MC, ou de IH et de MC; DF, qui est le sinus de BD différence des deux arcs, est égal à KN qui vaut KM moins MN, c'est-à-dire IH moins CM: ainsi pour trouver le sinus de la somme, il faut ajouter la valeur de MC à celle de IH, et au contraire l'en retrancher pour avoir le sinus de la différence.

Or, les triangles semblables LAG, LIH donnent LA : LI :: AG : IH, c'est-à-dire R : cos AC :: sin AB : IH; donc (*Arith.*, **179**) IH vaut $\frac{\sin AB \times \cos AC}{R}$.

Les triangles LAG et CIM semblables, parce qu'en vertu de la construction qu'on a faite, ils ont les côtés perpendiculaires l'un à l'autre, donnent (**112**) LA : LG :: CI : MC, ou R : cos AB :: sin AC : MC; donc aut $\frac{\sin AC \times \cos AB}{R}$

donc il faut ajouter $\frac{\sin AC \times \cos AB}{R}$ avec $\frac{\sin AB \times \cos AC}{R}$ pour avoir le sinus de la somme, et l'en retrancher au contraire pour avoir le sinus de la différence.

285. *Pour avoir le cosinus de la somme ou de la différence de deux arcs dont on connaît les sinus,* il faut, après avoir calculé (**281**) les cosinus de chacun de ces deux arcs, multiplier ces deux cosinus l'un par l'autre; multiplier pareillement les deux sinus; alors, retranchant le second produit du premier, et divisant le reste par le rayon, on aura le cosinus de la somme des deux arcs. Au contraire, pour avoir celui de la différence, on ajoutera les deux produits, et l'on en divisera la somme par le rayon. Car puisque DC est coupée en deux parties égales en I, FK sera coupée en deux parties égales en H; or LK, qui est le cosinus de la somme, vaut LH moins HK, ou moins IM; et LF, qui est le cosinus de la différence, vaut LH plus HF, ou LH plus HK, ou enfin LH plus IM; voyons donc quelles sont les valeurs de LH et de IM.

Les triangles semblables LGA, LHI donnent LA : LI :: LG : LH; c'est-à-dire R : cos AC :: cos AB : LH; donc HI vaut $\frac{\cos AB \times \cos AC}{R}$.

Les triangles semblables LAG, CIM donnent LA : AG :: CI : IM; c'est-à-dire R : sin AB :: sin AC : IM; donc IM vaut $\frac{\sin AB \times \sin AC}{R}$.

Il faut donc, pour avoir le cosinus de la somme, retrancher $\frac{\sin AB \times \sin AC}{R}$ de $\frac{\cos AB \times \cos AC}{R}$; et au contraire l'ajouter, pour avoir le cosinus de la différence.

286. *La somme des sinus de deux arcs* AB, AC (fig. 147) *est à la différence de ces mêmes sinus, comme la tangente de la moitié de la somme de ces deux arcs est à la tangente de la moitié de leur différence;* c'est-à-dire que $\sin AB + \sin AC : \sin AB - \sin AC :: \text{tang}\,\frac{AB + AC}{2} : \text{tang}\,\frac{AB - AC}{2}$.

Après avoir tiré le diamètre AM, portez l'arc AB de A en D, tirez la corde BD qui sera perpendiculaire sur AM. Par le point C, tirez CP perpendiculaire, et CF parallèle à AM. Du point F menez les cordes FB et FD, et d'un rayon FG égal à celui du cercle BAD, décrivez l'arc IGK rencontrant CF en G, et en ce point G élevez HL perpendiculaire à CF; les lignes GH et GL sont les tangentes des angles GFH et GFL, ou CFB et CFD, qui, ayant leurs sommets à la circonférence, ont pour mesure la moitié des arcs CB, CD sur lesquels ils s'appuient (65), c'est-à-dire la moitié de la différence BC, et la moitié de la somme CD de deux arcs AB, AC; ainsi GL et GH sont les tangentes de la moitié de la somme et de la moitié de la différence de ces mêmes arcs.

Cela posé, il est visible que DS étant égal à BS, la ligne DE vaut BS + SE ou BS + CP, c'est-à-dire la somme des sinus des arcs AB, AC; pareillement, BE vaut BS — SE ou BS — CP,

c'est-à-dire la différence des sinus de ces mêmes arcs. Or, à cause des parallèles BD, HL, on a (118)

$$DE : BE :: LG : GH;$$

donc

$$\sin AB + \sin AC : \sin AB - \sin AC$$
$$:: \text{tang}\, \frac{AB + AC}{2} : \text{tang}\, \frac{AB - AC}{2}.$$

287. Donc *la somme des cosinus de deux arcs est à la différence de ces cosinus, comme la cotangente de la moitié de la somme de ces deux arcs est à la cotangente de la moitié de leur différence.*

Car les cosinus n'étant autre chose que des sinus de complément, il suit de la proposition précédente que la somme des cosinus est à leur différence, comme la tangente de la moitié de la somme des compléments est à la tangente de la moitié de la différence des mêmes compléments : or, la moitié de la somme des compléments de deux arcs est le complément de la moitié de la somme de ces deux arcs ; et la demi-différence des compléments est la même que la demi-différence des arcs ; donc, etc.

288. Les trois principes posés (**271**, **282** et **284**) suffisent pour concevoir comment on pourrait s'y prendre pour former une Table des sinus. En effet, on connaît le sinus de 30° par ce qui a été dit (**271**) ; et par ce qui a été dit (**282**), on peut trouver celui de 15°, et successivement ceux de 7° 30′, 3° 45′, 1° 52′ 30″, 0° 56′ 15″, 0° 28′ 7″ 30‴, 0° 14′ 3″ 45‴, 0° 7′ 1″ 52‴ 30ᴵᵛ.

Cela posé, on remarquera que, quand les arcs sont fort petits, ils ne diffèrent pas sensiblement de leurs sinus, et sont par conséquent proportionnels à ces sinus ; ainsi, pour trouver le sinus de 1′, on fera cette proportion : *L'arc de* 0° 7′ 1″ 52‴ 30ᴵᵛ *est à l'arc de* 0° 1′, *comme le sinus de ce premier arc est au sinus de* 1′.

Si dans ce calcul on suppose le rayon de 100 000 parties seu-

lement, il faudra calculer le sinus des arcs que nous venons de rapporter, avec trois décimales, pour être en droit d'en conclure les suivants à moins d'une unité près; alors on remontera facilement aux autres en cette manière.

Depuis 1′ jusqu'à 3°0′, il suffira de multiplier le sinus de 1′ successivement par 2, 3, 4, 5, etc., pour avoir les sinus de 2′, 3′, etc., jusqu'à 3° à moins d'une unité près.

Pour calculer les sinus des arcs au-dessus de 3°0′, on fera usage de ce qui a été dit (284); mais on abrégera considérablement le travail en ne calculant ces sinus, par ce principe, que de degré en degré seulement. Quant aux minutes intermédiaires, on y satisfera en prenant la différence des sinus de deux degrés consécutifs, et formant cette proportion : 60 *minutes sont au nombre de minutes dont il s'agit, comme la différence des sinus des deux degrés voisins est à un quatrième terme*, qui sera ce qu'on doit ajouter au plus petit des deux sinus pour avoir le sinus du nombre de degrés et minutes dont il s'agit. Par exemple, si, après avoir trouvé que les sinus de 8° et de 9° sont 13917 et 15643, je voulais avoir le sinus de 8°17′, je prendrais la différence 1726 de ces sinus, et je calculerais le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers sont 60′:17′::1726:

Ce quatrième terme qui est 489 à très-peu près, étant ajouté à 13917, donne 14406 pour le sinus de 8° 17′, tel qu'il est dans les Tables, à moins d'une unité près.

La raison de cette pratique est fondée sur ce que lorsque l'arc KL (*fig.* 129) est petit, comme de 1° par exemple, les différences LM, I*u* des sinus LF, IH sont à peu près proportionnelles aux différences KL, KI des arcs correspondants AL, AI, parce que les triangles KML, K*u*I, pouvant être considérés comme rectilignes, sont semblables.

289. Cette méthode ne doit cependant être employée que jusqu'à 87°, parce que, passé ce terme, on ne peut se permettre de prendre *iu* (*fig.* 148) pour la différence des sinus PB, Q*x*, parce que la quantité *ux*, toute petite qu'elle est, a un rapport

sensible avec iu, et d'autant plus sensible que l'arc AB approche plus de 90°. Dans ce cas, il faut se rappeler que (170) les lignes DE, Dt, qui sont les différences entre le rayon et les sinus PB, Qx, sont proportionnelles aux carrés des cordes DB et Dx, ou, à cause que les arcs DB et Dx sont fort petits, aux carrés des arcs DB et Dx; c'est pourquoi, ayant calculé le sinus de 87°, on prendra sa différence avec le rayon 100000; et pour trouver le sinus de tout autre arc entre 87° et 90°, on fera cette proportion: Le carré de 3° ou de 180′ est au carré du nombre des minutes du complément de l'arc en question, comme la différence du rayon au sinus de 87° est à un quatrième terme qui sera Dt, et qui, étant retranché du rayon, donnera Ct ou Qx sinus de l'arc en question. Par exemple, ayant trouvé que le sinus de 87° est 99863, si je veux avoir le sinus de 88° 24′, dont le complément est 1° 36′ ou 96′, je ferai cette proportion $\overline{180'}^2 : \overline{96'}^2 :: 137 : Dt$, par laquelle je trouve que Dt vaut 39, à très-peu de chose près; retranchant 39 du rayon 100000, j'ai 99961 pour le sinus de 88°24′, tel qu'il est, en effet, dans les Tables.

290. Ayant ainsi calculé les sinus, on aura facilement les tangentes et les sécantes, par ce qui a été dit (**278**).

291. Les sinus étant calculés, on calcule leurs logarithmes comme on calcule ceux des nombres. Il faut pourtant observer que si l'on prenait dans les Tables la valeur numérique d'un des sinus, pour calculer son logarithme selon ce qui a été dit (*Arith.*, **239**), on ne trouverait pas ce logarithme absolument le même qu'il est dans la colonne des logarithmes des sinus; la raison en est que les sinus des Tables ont été calculés originairement, dans la supposition que le rayon était de 10 000 000 000 parties; mais comme les calculs ordinaires n'exigent pas une telle précision, on a supprimé, dans les Tables actuelles, les cinq derniers chiffres des valeurs numériques des sinus, tangentes, etc.; en sorte que ces valeurs, telles qu'elles sont actuellement dans les Tables, ne sont approchées qu'à environ une unité près sur

100 000. Il n'en a pas été de même des logarithmes des sinus, tangentes, etc.; on les a conservés tels qu'ils ont été calculés pour le rayon supposé de 10 000 000 000 parties; et c'est pour cette raison qu'on leur trouve une caractéristique beaucoup plus forte que ne semble le supposer la valeur numérique du sinus correspondant, ou de la tangente correspondante; en sorte que, lorsqu'on fait usage des logarithmes des sinus, tangentes, etc., on calcule dans la supposition tacite que le rayon soit de 10000 000 000 parties, et lorsqu'on fait usage des valeurs numériques des sinus, tangentes, etc., on calcule dans la supposition que le rayon soit de 100 000 parties seulement.

A l'égard des logarithmes des tangentes et sécantes, on les a par une simple addition et une soustraction, lorsqu'une fois on a ceux des sinus; cela est évident, d'après ce qui a été dit (**278**), et (*Arith.*, **232**).

*__292.__ Quoique les Tables ordinaires ne donnent les sinus que pour les degrés et minutes, néanmoins on peut en déduire les valeurs de ces mêmes lignes pour les degrés, minutes et secondes; et cela en suivant exactement ce que nous venons de prescrire pour les degrés et minutes seulement. Mais comme on emploie plus souvent les logarithmes de ces lignes au lieu de ces lignes elles-mêmes, nous nous arrêterons un moment sur ce dernier objet.

Supposons qu'on ait les logarithmes des sinus et des tangentes, de minute en minute; quand on voudra avoir le logarithme du sinus d'un certain nombre de degrés, minutes et secondes, on prendra dans les Tables celui du sinus du nombre des degrés et minutes: on prendra aussi la différence des deux logarithmes voisins qui est à côté, et on fera cette proportion: 60" sont au nombre des secondes en question, comme la différence des logarithmes, prise dans les Tables, est à un quatrième terme qu'on ajoutera au logarithme du sinus des degrés et minutes.

Si, au contraire, on avait un logarithme de sinus qui ne répondît pas à un nombre exact de degrés et minutes, pour avoir les secondes, on ferait cette proportion: La différence des deux logarithmes, entre lesquels tombe le logarithme donné, est à la différence entre ce même logarithme, et celui qui est immédiatement plus petit dans la Table, comme 60" sont à un quatrième terme, qui serait le nombre de secondes à ajouter au nombre de degrés et minutes de l'arc qui, dans la Table, est immédiatement au-dessous de celui que l'on cherche.

On pourra suivre cette règle, tant que l'arc ne sera pas au-dessous de 3°: lorsqu'il sera au-dessous, on se conduira comme dans cet exemple. Supposons qu'on demande le sinus de 1°55′48″, on ferait cette proportion:

1° 55' : 1° 55' 48" :: le sinus de 1° 55' est à un quatrième terme, qui, à cause que les petits arcs sont proportionnels à leurs sinus, sera, sans erreur sensible, le sinus de 1° 55' 48". Mais pour calculer plus commodément, on réduira les deux premiers termes en secondes; et alors, prenant dans les Tables le logarithme du sinus de 1° 55', qui est le troisième terme, on lui ajoutera le logarithme 1° 55' 48" réduits en secondes: enfin, du total on retranchera le logarithme de 1° 55' réduits en secondes; le reste sera (*Arith.*, 232) le logarithme du quatrième terme, c'est-à-dire le logarithme cherché.

Réciproquement, pour trouver le nombre de degrés, minutes et secondes d'un arc au-dessous de 3°, et dont on a le sinus, on chercherait d'abord dans les Tables quel est le nombre de degrés et minutes; puis on ferait cette proportion: Le sinus du nombre de degrés et minutes trouvés est au sinus proposé, comme ce même nombre de degrés et minutes réduits en secondes est au nombre total de secondes de l'arc cherché. Ainsi, par logarithmes, l'opération se réduira à prendre la différence entre le logarithme du sinus proposé, et celui du sinus du nombre de degrés et minutes immédiatement au-dessous, et à ajouter ce logarithme au logarithme de ce nombre de degrés et minutes réduits en secondes; la somme sera le logarithme du nombre de secondes que vaut l'arc cherché. Par exemple, si l'on me donne 8,6233427 pour logarithme du sinus d'un arc, je trouve dans les Tables que le nombre de degrés et minutes le plus approchant est 2° 24', et que la différence entre le logarithme du sinus proposé et celui du sinus de ce dernier arc est 0,0013811; j'ajoute cette différence avec 3,9365137, logarithme de 2° 24' réduits en secondes; la somme 3,9378948 répond, dans les Tables de logarithmes, à 8667; c'est le nombre de secondes de l'arc cherché, qui, par conséquent, est de 2° 24' 27". Cette règle est l'inverse de la précédente.

A l'égard des logarithmes des tangentes, on suivra les mêmes règles, en changeant le mot de *sinus* en celui de *tangente*. Il faut seulement en excepter les arcs qui sont entre 87° et 90°, pour lesquels on suivra celle-ci. Calculez le logarithme de la tangente du complément, par la règle qu'on vient de prescrire pour les tangentes, et retranchez ce logarithme du double du logarithme du rayon. En effet, selon ce qui a été dit (280), la tangente est le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers sont la cotangente, le rayon et le rayon; et si, au contraire, on avait le logarithme de la tangente d'un arc qui, devant être entre 87° et 90°, devrait avoir des secondes, on retrancherait ce logarithme du double du logarithme du rayon, et l'on aurait la tangente du complément, qui, étant nécessairement entre 0° et 3°, se déterminerait facilement d'après ce qui précède; prenant le complément de l'arc ainsi trouvé, on aurait l'arc cherché.

293. Puisque le sinus d'un arc est la moitié de la corde d'un arc double, si l'on descendait par le principe donné (282) jusqu'au sinus de l'arc le plus approchant de 1", et qu'en doublant

ce sinus on répétât ce double autant de fois que l'arc dont il est la corde est contenu dans la demi-circonférence, il est visible qu'on aurait un nombre fort approchant de la longueur de la demi-circonférence, mais plus petit; et si par la proportion donnée (278) on calculait la tangente du même arc, et que l'ayant doublée on répétât ce double autant de fois que le double de cet arc est contenu dans la demi-circonférence, on trouverait un nombre fort approchant de la demi-circonférence, mais plus grand: on peut donc, par le calcul des sinus, approcher du rapport du diamètre à la circonférence; nous ne nous arrêterons pas à ce calcul, parce que nous donnerons ailleurs une méthode plus expéditive. Quoi qu'il en soit, on trouverait, par cette méthode, que le rayon étant supposé de 10000000000, la demi-circonférence serait entre 31415926536 et 31415926535. Concluons donc de là que le rayon étant 1, les 180 degrés de la circonférence valent 3,1415926535; le degré vaut 0,0174532925; la minute vaut 0,0002908882o8, et ainsi de suite. Nous rapportons ici ces nombres, parce qu'ils peuvent souvent être utiles.

L'instrument qu'on emploie lorsqu'on veut mesurer les angles avec une précision suffisante pour la plupart des pratiques, est le *graphomètre* (*fig.* 9).

C'est un demi-cercle de cuivre divisé en 180°, et sur lequel on marque même les demi-degrés, selon la grandeur de son diamètre.

La demi-circonférence DHB, sur laquelle les divisions sont marquées, n'est pas une ligne simple; c'est une couronne demi-circulaire, à laquelle l'ouvrier donne plus ou moins de largeur; et cette couronne est ce qu'on appelle le *limbe* de l'instrument.

Le diamètre DB fait corps avec l'instrument; mais le diamètre EC, qu'on nomme *alidade*, n'y est assujetti que par le centre A, autour duquel il peut tourner et parcourir, par son extrémité C, toutes les divisions de l'instrument. Chacun de ces deux diamètres est garni à ses deux extrémités de *pinnules*, à travers lesquelles on regarde les objets. Quelquefois, au lieu de pinnules, chacun de ces deux diamètres porte une lunette. Celle qui répond au diamètre BD est parallèle à ce diamètre; l'autre, fixée à l'alidade EC, peut se mouvoir avec elle, et s'incliner un peu sur elle, afin de n'être pas obligé de déranger le plan de l'instrument pour apercevoir les objets qui seraient un peu élevés ou abaissés à l'égard de ce plan.

L'instrument est porté sur un pied, et peut, sans rien changer à la position du pied, être incliné dans tous les sens, selon le besoin.

Pour rendre le graphomètre propre à mesurer les angles avec plus de précision, à indiquer les parties de degré, on fait le plus souvent, sur la largeur et à l'extrémité du diamètre mobile, des divisions (*) qui, selon la manière dont elles correspondent à celles du limbe, servent à connaître les parties de degré, de 5 en 5 minutes, ou de 4 en 4 minutes, etc.

Pour les faire marquer de 5′ en 5′ par exemple, on prend sur la largeur et à l'extrémité de l'alidade une étendue de 11 degrés, et on la divise en douze parties égales, dont chacune est par conséquent de 55′. Lorsque la première division de l'alidade correspond à l'une des divisions du limbe, alors l'angle compris entre les deux diamètres est mesuré par les divisions du limbe. Mais lorsque la première division de l'alidade ne s'accorde pas avec une des divisions du limbe, alors on cherche sur l'une et sur l'autre quelle est la division qui approche le plus de se correspondre, et l'on ajoute au nombre de degrés marqué sur le limbe entre la première division de celui-ci et celle de l'alidade, autant de fois 5 minutes qu'il y a d'intervalles sur l'alidade entre sa première division et celle qui a sa correspondance sur le limbe, parce que pour chaque intervalle il y a 5 minutes de différence entre le limbe et l'alidade.

Si l'on voulait évaluer les minutes de 4 en 4, on prendrait un arc de 14 degrés que l'on diviserait en quinze parties; et pour évaluer de 3 en 3, on prendrait 19 degrés, que l'on diviserait en 20 parties.

Pour mesurer un angle avec cet instrument, par exemple, pour mesurer l'angle que formeraient au point A (*fig.* 9) les lignes qu'on imaginerait tirées de ce point aux deux objets G et F, on place le centre du graphomètre en A, et l'on dispose l'instrument de manière que, regardant à travers les pinnules du diamètre fixe BD, l'on aperçoive l'un F de ces objets, et qu'en même temps l'autre objet G se trouve dans le prolongement du plan de l'instrument, ce qu'on fait en inclinant plus ou moins le graphomètre: alors on fait mouvoir l'alidade EC jusqu'à ce qu'on puisse apercevoir l'objet G à travers les pinnules E et C; l'arc BC compris entre les deux diamètres est la mesure de l'angle GAF.

Lorsqu'on veut employer le graphomètre à mesurer des angles dans un plan vertical, c'est-à-dire des angles formés dans un plan qui passe par ce qu'on appelle une ligne *à-plomb*, on donne au plan de l'instrument la position verticale, à l'aide d'un poids suspendu par un fil dont on attache une extrémité au centre du graphomètre. Lorsque le fil rase le bord de l'instrument, et répond à 90°, le graphomètre a la disposition convenable.

De la résolution des triangles rectangles.

294. Nous avons dit ci-dessus (267) que pour être en état de

(*) Ces divisions, tracées aux extrémités du diamètre mobile, constituent ce qu'on appelle *le nonius* ou *vernier*.

calculer ou de résoudre un triangle, il fallait connaître trois des six parties qui le composent, et que parmi les trois choses connues, il fallait qu'il y eût au moins un côté. Comme l'angle droit est un angle connu, il suffit donc, dans les triangles rectangles, de connaître deux choses différentes de l'angle droit; mais il faut qu'une au moins de ces deux choses soit un côté. Il faut encore remarquer que comme les deux angles aigus d'un triangle rectangle valent ensemble un angle droit, dès que l'un des deux est connu, l'autre l'est aussi.

La résolution des triangles rectangles se réduit à quatre cas: ou les deux choses connues sont un des deux angles aigus et un côté de l'angle droit, ou elles sont un angle aigu et l'hypoténuse, ou un côté de l'angle droit et l'hypoténuse, ou enfin les deux côtés de l'angle droit.

Ces quatre cas trouveront toujours leur résolution dans l'une des deux proportions ou analogies suivantes.

295. 1°. *Le rayon des Tables est au sinus d'un des angles aigus, comme l'hypoténuse est au côté opposé à cet angle aigu.*

296. 2°. *Le rayon des Tables est à la tangente d'un des angles aigus, comme le côté de l'angle droit adjacent à cet angle est au côté opposé à ce même angle.*

Pour démontrer la première de ces deux analogies, il n'y a qu'à se représenter (*fig.* 144) que dans le triangle rectangle CED, la partie CA de l'hypoténuse soit le rayon des Tables; alors, en imaginant l'arc AB, la perpendiculaire AP sera le sinus de l'angle ACB ou DCE: or, à cause des parallèles AP et DE, on aura, dans les triangles semblables CAP, CDE, CA : AP :: CD : DE, c'est-à-dire R : sin DCE :: CD : DE, ce qui est précisément la première analogie.

On prouvera de même que R : sin CDE :: CD : CE.

Pour la seconde, il faut se représenter dans le triangle rectangle CEF (*fig.* 149), que la partie CA du côté CE soit le rayon des Tables, et ayant imaginé l'arc AB, la perpendiculaire AD élevée sur AC au point A sera la tangente de l'angle C

ou FCE; alors, à cause des triangles semblables CAD, CEF, on aura CA : AD :: CE : EF, c'est-à-dire R : tang FCE :: CE : EF, ce qui fait la seconde des deux analogies énoncées ci-dessus.

On prouvera de la même manière que

R : tang CEF :: EF : CE.

297. Dans les applications qui vont suivre, nous emploierons toujours les logarithmes des sinus, tangentes, etc., au lieu des sinus, tangentes, etc.; et, pour familiariser les commençants avec l'usage des compléments arithmétiques, nous en ferons usage dans tous les calculs, à l'exception des cas où le logarithme à retrancher serait celui du rayon dont la caractéristique étant 10, la soustraction est très-facile. Mais pour ne point obliger ceux qui n'auraient que la première édition de l'Arithmétique, de recourir à la seconde, nous allons exposer en peu de mots l'idée et l'usage des compléments arithmétiques.

Le complément arithmétique d'un nombre se prend en retranchant de 9 chacun des chiffres de ce nombre, excepté le dernier sur la droite, qu'on retranche de 10. Ainsi le complément arithmétique d'un nombre peut se prendre à l'inspection de ces chiffres, sans aucune autre opération.

Les compléments arithmétiques servent à changer les soustractions en additions. Ainsi, si de 78549 je veux retrancher 65647, je puis à cette opération substituer l'addition de 78549 avec 34353, qui est le complément arithmétique de 65647; alors il ne s'agit plus que d'ôter une unité au premier chiffre de la gauche de la somme: on ôterait deux unités, si l'on avait ajouté deux compléments arithmétiques, et ainsi de suite. Dans le cas présent, la somme serait 112902, de laquelle supprimant une unité au premier chiffre, il reste 12902, qui est précisément ce que l'on aurait eu, si de 78549 on avait retranché 65647, selon la règle ordinaire.

La raison est facile à apercevoir, en observant que le complément arithmétique de 65647 n'est autre chose que 100000 moins 65647; ainsi, quand on ajoute le complément arithmétique, on ajoute 100000, et l'on retranche 65647; le résultat

renferme donc 100000 de trop; c'est-à-dire que son premier chiffre est trop fort d'une unité.

Donc, puisque (*Arith.*, 232) pour faire une règle de *trois* par logarithmes, il faut ajouter les logarithmes des deux moyens, et retrancher le logarithme du premier terme, on pourra, en vertu de l'observation précédente, faire une somme des logarithmes des deux moyens et du complément arithmétique du logarithme du premier terme, et l'on diminuera d'une unité le premier chiffre de la droite du résultat.

Après ces observations, venons à l'application des deux analogies démontrées ci-dessus, aux quatre cas dont nous avons parlé.

Exemple I. Supposons qu'il s'agisse de déterminer la hauteur AC d'un édifice (*fig.* 150) par des mesures prises sur le terrain.

On s'éloignera de cet édifice à une distance CD, telle que l'angle compris entre les deux lignes qu'on imaginera menées du point D au pied et au sommet de l'édifice, ne soit ni trop aigu ni fort approchant de 90°; et ayant mesuré cette distance CD, on fixera au point D le pied d'un graphomètre. On disposera cet instrument de manière que son plan soit vertical et dirigé vers l'axe AC de la tour, et que son diamètre fixe HF soit horizontal, ce qui se fera à l'aide d'un petit poids suspendu par un fil attaché au centre. Ce fil doit alors raser le bord de l'instrument et répondre à 90°. On fera mouvoir le diamètre mobile jusqu'à ce qu'on puisse apercevoir à travers les pinnules ou la lunette dont il est garni, le sommet A de l'édifice. Alors on observera sur l'instrument le nombre des degrés de l'angle FEG, qui est aussi celui de son opposé au sommet AEB.

Cela posé, la hauteur AC de l'édifice étant perpendiculaire à l'horizon, est perpendiculaire à BE; c'est pourquoi on a un triangle rectangle ABE, dans lequel, outre l'angle droit, on connaît BE égal à CD qu'on a mesuré, et l'angle AEB; on cherche la valeur de AB; on voit donc que les trois choses connues, et celle que l'on cherche, sont les termes de l'analogie du n° 296; donc, pour trouver AB, on fera cette proportion, R : tang AEB :: BE : AB.

Supposons, par exemple, que la distance CD ou BE ait été trouvée de 132 pieds et l'angle AEB de 48° 54'.

On aura R : tang 48° 54′ :: 132ᴾ : AB, de sorte qu'en prenant dans les Tables la valeur de la tangente de 48° 54′, la multipliant par 132, et divisant ensuite par la valeur du rayon prise dans les Tables, on aura le nombre de pieds de AB, auquel ajoutant la hauteur ED de l'instrument, on aura la hauteur cherchée AC.

Mais on peut abréger considérablement le calcul, en employant, au lieu de ces nombres, leurs logarithmes, parce qu'alors il ne s'agit plus (*Arith.*, 232) que d'ajouter les logarithmes du second et du troisième terme, et de retrancher le logarithme du premier; c'est pourquoi on fera le calcul comme il suit :

Log tang 48° 54′..................	10,0593064
Log 132.........................	2,1205739
Somme....................	12,1798803
Log du rayon..................	10,0000000
Reste ou log de AB..............	2,1798803

qui répond dans les Tables à 151,32, à moins d'un centième près. Ainsi AB est de 151^p et 32 centièmes, ou $151^p 3^p 10^l$.

Remarquons, en passant, que le logarithme du rayon ayant 10 pour caractéristique, et des zéros pour ses autres chiffres, on peut, lorsqu'il s'agit de l'ajouter ou de le retrancher, se dispenser de l'écrire, et se contenter d'ajouter ou d'ôter une unité aux dizaines de la caractéristique du logarithme auquel il doit être ajouté, ou dont il doit être retranché.

Exemple II. On a couru, en partant d'un point connu A (*fig.* 151), 32 lieues sur la ligne AB parallèle à la ligne GF qui marque le nord-nord-est : on demande combien on a avancé vers l'est, et de combien vers le nord.

On imaginera par les deux points A et B les deux lignes AC et BC parallèles, la première à la ligne nord et sud NS, et la seconde à la ligne est et ouest EO; comme ces deux lignes font un angle droit, le triangle ACB sera rectangle en C; on connaît, dans ce triangle, le côté AB qui est de 32 lieues, et l'angle CAB qui, à cause des parallèles, est égal à l'angle NDF, lequel, à

cause que DF marque le nord-nord-est, est de 22° 30′ ou le quart de 90°.

On fera donc, pour trouver BC, cette analogie (285)

$$R : \sin 22° 30' :: 32^l : BC.$$

Et pour trouver AC, on remarquera que l'angle B est complément de l'angle A; c'est pourquoi on fera cette analogie (295)

$$R : \sin 67° 30' :: 32^l : AC.$$

On fera ces deux opérations par logarithmes, comme il suit :

Log sin 22° 3′	9,5828397
Log 32	1,5051500
Somme	11,0879897
Log du rayon	10,0000000
Reste ou log de BC	1,0879897

qui répond à 12,25, à moins d'un centième près.

Log sin 67° 30′	9,9656153
Log 32	1,5051500
Somme	1,4707653
Log du rayon	10,0000000
Reste ou log de AC	1,4707653

qui répond à 29,56, à moins d'un centième près.

Ainsi on s'est avancé de 12 lieues et 25 centièmes ou un et un quart vers l'est, et de 29 lieues et 56 centièmes vers le nord.

Le nombre de lieues qu'on a courues selon l'une et l'autre de ces deux directions sert à déterminer le lieu B de la terre où se trouve un vaisseau lorsqu'il a parcouru AB; mais le nombre de lieues courues vers l'est a besoin d'une correction dont ce n'est pas encore ici le lieu de parler. Il ne s'agit, quant à présent, que des premiers usages de la Trigonométrie.

Exemple III. On a couru 42 lieues selon la ligne AB dont la position est inconnue, et l'on sait qu'on a avancé de 35 lieues au nord : on demande la direction de la route AB, c'est-à-dire quelle aire de vent on a suivie.

On connaît donc ici le côté AC de l'angle droit et l'hypoté-

nuse, et il s'agit de trouver l'angle CAB. Comme les deux angles A et B font ensemble un angle droit, nous connaîtrons l'angle A, si nous pouvons déterminer l'angle B. Or, pour trouver celui-ci nous n'avons qu'à faire cette analogie (**295**)

R : sin B :: AB : AC.

C'est-à-dire R : sin B :: 42 : 35; ou bien, en écrivant le second rapport à la place du premier, 42 : 35 :: R : sin B.

Faisant l'opération par logarithmes, on a

Log 35	1,5440680
Log du rayon	10,0000000
Complém. arithm. du log de 42	8,3767507
Somme ou log du sinus de B	19,9208187

qui, dans les Tables, répond à 56° 27'; donc l'angle A, ou l'aire de vent, est de 33° 33'.

Exemple IV. On a couru selon la ligne AB, dont la position et la grandeur sont inconnues; mais on sait qu'on a avancé de 15 lieues à l'est, et de 35 lieues au nord : on demande la direction et la longueur et la route.

On connaît donc ici les deux côtés AC et BC de l'angle droit, et l'on demande les angles et l'hypoténuse. Pour trouver l'angle A, on fera cette analogie (**296**) AC : BC :: R : tang A; c'est-à-dire 35 : 15 :: R : tang A.

Et faisant l'opération par logarithmes,

Log 15	1,1760913
Log du rayon	10,0000000
Complém. arithm. du log de 35	8,4559320
Somme ou log tang A	19,6320233

qui, dans la Table, répond à 23° 12'.

Pour avoir AB, on peut, quand on a déterminé l'angle A, se conduire comme dans l'exemple III. Mais il n'est pas nécessaire de calculer l'angle A ; la proposition démontrée (**164** et **166**) suffit; ainsi, prenant le carré de 15 qui est 225, et l'ajoutant au carré de 35 qui est 1225, on aura 1450 pour le carré de AB; et tirant la racine carrée, on aura 38,08 pour la valeur de AB, à moins d'un centième près.

Par la même raison, si l'hypoténuse AB et l'un AC des côtés de l'angle droit étant donnés, on demandait l'autre côté BC, il ne serait pas nécessaire de calculer l'angle A ; on retrancherait (166) le carré du côté connu AC, du carré de l'hypoténuse AB; la racine carrée du reste serait la valeur du côté BC.

C'est encore par la résolution des triangles rectangles qu'on peut déterminer de combien il s'en faut que le rayon AD (*fig.* 152), par lequel on vise à l'horizon de la mer lorsqu'on est élevé d'une certaine quantité AB au-dessus d'un point B de sa surface, ne soit parallèle à la surface de la mer.

Comme le rayon visuel AD est alors une tangente, si l'on imagine le rayon CD, l'angle D sera droit (48) : or, on connaît le rayon CD de la terre, qui est 19611500 pieds. Et si au rayon CB, de 19611500, on ajoute la hauteur AB à laquelle on est au-dessus de B, on aura le côté AC; on connaîtra donc deux choses, outre l'angle droit ; on pourra donc calculer l'angle CAD, dont la différence DAO avec un angle droit sera l'abaissement du rayon AD au-dessous du rayon AO parallèle à la surface de la mer en B.

Si dans le même triangle ADC on calcule le côté AD, on aura la plus grande distance à laquelle la vue puisse s'étendre lorsque l'œil est à la hauteur AB. Mais comme les Tables ordinaires ne peuvent pas donner l'angle CAD et le côté AB avec une précision suffisante, lorsque AB est une très-petite quantité à l'égard du rayon de la terre, voici comment on peut y suppléer :

On concevra AC prolongé jusqu'à la circonférence en E; alors AE étant une sécante, et AD une tangente, selon ce qui a été dit (129), on aura AE : AD :: AD : AB; ainsi, pour avoir AD, on prendra (*Arith.*, 178) une moyenne proportionnelle entre AE et AB.

Par exemple, si l'œil A était élevé de 20 pieds au-dessus de la mer, AB serait de 20 pieds, et AE serait de deux fois 19611500 pieds, plus 20, c'est-à-dire de 39223020 pieds; le carré de AD serait donc de 39223020 × 20 ou de 784460400 ; donc (*Arith.*, 178 et 159) AD serait de 28008 pieds ; c'est-à-dire qu'un œil élevé de 20 pieds au-dessus de la surface de la

mer peut découvrir jusqu'à 28008 pieds, ou une lieue et deux tiers à la ronde.

Maintenant, pour savoir de combien le rayon visuel AD est abaissé à l'égard de l'horizontale AO, on remarquera que, vu la petitesse de AB, la ligne AD ne peut différer sensiblement de l'arc BD; ainsi l'arc BC est de 28008 pieds. Or, puisque le rayon est de 19611500 pieds, on trouvera facilement (152) que la circonférence est de 123222688: et par conséquent (153), on trouvera le nombre de degrés de l'arc BD par cette proportion, 123222688 : 28008 :: 360° est à un quatrième terme que l'on trouve de 0° 4′ 54″; ainsi l'angle ACD et par conséquent DAO est de 0° 4′ 54″, lorsque AB est de 20 pieds.

Résolution des Triangles obliquangles.

298. On se sert du terme de *triangles obliquangles*, pour désigner, en général, les triangles qui n'ont point d'angle droit.

299. *Dans tout triangle rectiligne, le sinus d'un angle est au côté opposé à cet angle, comme le sinus de tout autre angle du même triangle est au côté qui lui est opposé.*

Car si l'on imagine un cercle circonscrit au triangle ABC (*fig.* 153), et qu'ayant tiré les rayons DA, DB, DC, on décrive d'un rayon D*b* égal à celui des Tables, le cercle *abc*; qu'enfin on tire les cordes *ab*, *bc*, *ac* qui joignent les points de section *a*, *b*, *c*, il est facile de voir que le triangle *abc* est semblable au triangle ABC, car les lignes D*a*, D*b* étant égales, sont proportionnelles aux lignes DA, DB; donc (108) *ab* est parallèle à AB. On prouvera de même que *bc* est parallèle à BC, et *ac* parallèle à AC; donc (111) AB : *ab* :: BC : *bc*, ou AB : $\frac{1}{2}$*ab* :: BC : $\frac{1}{2}$*bc*. Or, la moitié de la corde *ab* est (270) le sinus de l'arc *ah* moitié de l'arc *ahb*, et cette moitié de l'arc *ahb* est la mesure de l'angle *acb* qui a son sommet à la circonférence, et qui est égal à l'angle ACB; donc $\frac{1}{2}$*ab* est le sinus de l'angle ACB. On prouvera de même que $\frac{1}{2}$*bc* est le sinus de l'angle BAC; donc AB : sin ACB :: BC : sin BAC.

300. Cette proposition sert à résoudre un triangle, 1° lors-

qu'on connaît deux angles et un côté; 2° lorsqu'on connaît deux côtés et un angle opposé à l'un de ces côtés.

1er cas. Si l'on connaît l'angle B, l'angle C et le côté BC (*fig.* 65), on aura l'angle A, en ajoutant les deux angles B et C, et retranchant leur somme de 180; et pour avoir les deux côtés AC et AB, on fera les deux proportions

sin A : BC :: sin B : AC,
sin A : BC :: sin C : AB.

C'est ainsi qu'on peut résoudre par le calcul la question que nous avons examinée (121). Par exemple, si l'angle B a été observé de 78° 57′, l'angle C de 47° 34′, et le côté BC de 184 pieds, on aura 53° 29′ pour l'angle A, et l'on trouvera les deux autres côtés par ces deux proportions :

sin 53° 29′ : 184 :: sin 78° 57′ : AC,
sin 53° 29′ : 184 :: sin 47° 34′ : AB.

Faisant ces opérations par logarithmes, comme il suit :

Log 184	2,2648178
Log sin 78° 57′	9,9918727
Compl. arithm. du log sin 53° 29′	0,0949148
Somme ou log AC	12,3516053
Log 184	2,2648178
Log sin 47° 34′	9,8680934
Compl. arithm. du log sin 53° 29′	0,0949148
Somme ou log AB	12,2278260

on trouvera que AC est de 224p,7, et AB de 169p.

2e cas. Si l'on connaît le côté AB (*fig.* 141), le côté BC et l'angle A, on déterminera l'angle C en calculant son sinus par cette proportion :

BC : sin A :: AB : sin C.

Mais il faut remarquer, selon ce que nous avons déjà dit ci-dessus (267), que l'angle C ne sera déterminé qu'autant qu'on saura s'il doit être aigu ou obtus.

Par exemple, que AB soit de 68 pieds, BC de 37, et l'angle A de 32° 28′, la proportion sera 37 : sin 32° 28′ :: 68 : sin C.

On trouvera, en opérant comme ci-dessus, que ce sinus répond, dans les Tables, à 80° 36'; mais, comme le sinus d'un angle appartient aussi au supplément de cet angle, on ne sait si l'on doit prendre 80° 36', ou son supplément 99° 24'; mais si l'on sait que l'angle cherché doit être aigu, alors on est sûr qu'il est, dans ce cas-ci, de 80° 36'; et le triangle a alors la *fig.* ABC ; si, au contraire, il doit être obtus, il sera de 99° 24', et le triangle aura la *fig.* ABD.

Avant d'établir les deux propositions qui servent à résoudre les autres cas des triangles, il convient de placer ici une proposition qui nous sera utile pour l'application de ces deux propositions.

301. *Si l'on connaît la somme de deux quantités et leur différence, on aura la plus grande de ces deux quantités, en ajoutant la moitié de la différence à la moitié de la somme, et la plus petite, en retranchant, au contraire, la moitié de la différence de la moitié de la somme.*

Par exemple, si je sais que deux quantités font ensemble 57, et qu'elles diffèrent de 17, j'en conclus que ces deux quantités sont 37 et 20, en ajoutant, d'une part, la moitié de 17 à la moitié de 57, et retranchant, de l'autre part, la moitié de 17 de la moitié de 57.

En effet, puisque la somme comprend la plus grande et la plus petite, si à cette somme on ajoutait la différence, elle comprendrait alors le double de la plus grande; donc la plus grande vaut la moitié de ce tout, c'est-à-dire la moitié de la somme des deux quantités, plus la moitié de leur différence.

Au contraire, si de la somme on ôtait la différence, il resterait le double de la plus petite; donc la plus petite vaudrait la moitié du reste, c'est-à-dire la moitié de la somme, moins la moitié de la différence.

302. *Dans tout triangle rectiligne* ABC (fig. 154 et 155), *si de l'un des angles on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé, on aura toujours cette proportion : Le côté* AC, *sur lequel tombe, ou sur le prolongement duquel tombe la perpendiculaire,*

est à la somme AB + BC *des deux autres côtés, comme la différence* AB — BC *de ces mêmes côtés est à la différence des segments* AD *et* DC, *ou à leur somme, selon que la perpendiculaire tombe en dedans ou au dehors du triangle.*

Décrivez du point B comme centre, et d'un rayon égal au côté BC, la circonférence CEHF, et prolongez le côté AB jusqu'à ce qu'il la rencontre en E. Alors AE et AC sont deux sécantes tirées d'un même point pris hors du cercle; donc, selon ce qui a été dit (**127**), on aura cette proportion, AC : AE :: AG : AF.

Or, AE est égal à AB + BE ou AB + BC; AG est égal à AB — BG ou AB — BC, et AF est (*fig.* 154) égal à AD — DF ou (**82**) à AD — DC; donc AC : AB + BC :: AB — BC : AD — DC. Dans la *fig.* 155, AF est égal à AD + DF ou AD + DC; on a donc, dans ce cas, AC : AB + BC :: AB — BC : AD + DC.

303. Donc, lorsqu'on connaît les trois côtés d'un triangle, on peut, par cette proposition, connaître les segments formés par la perpendiculaire menée d'un des angles sur le côté opposé; car alors on connaît (*fig.* 154) la somme AC de ces segments, et la proportion qu'on vient d'enseigner fait connaître leur différence, puisqu'alors les trois premiers termes de cette proportion sont connus: on connaîtra donc chacun des segments, par ce qui a été dit (**301**). Dans la *fig.* 155, on connaît la différence des segments AD et CD, qui est le côté même AC, et la proportion détermine la valeur de leur somme.

304. Il est aisé, d'après cela, de résoudre cette question: *Connaissant les trois côtés d'un triangle, déterminer les angles?*

On imaginera une perpendiculaire abaissée de l'un de ces angles, ce qui donnera deux triangles rectangles ADC, CDB.

On calculera, par la proposition précédente, l'un des segments, CD par exemple; et alors, dans le triangle rectangle CBD, connaissant deux côtés BC et CD outre l'angle droit, on calculera facilement l'angle C, par ce qui a été dit (**295**).

EXEMPLE. Le côté AB est de 142 pieds, le côté BC de 64, et le côté AC de 184; on demande l'angle C.

Je calcule la différence des deux segments AD et DC par cette proportion, $184 : 142 + 64 :: 142 - 64 : AD - DC$, ou $184 : 206 :: 78 : AD - DC$, que je trouve valoir 87,32; donc (301) le petit segment CD vaut la moitié de 184, moins la moitié de 87,32, c'est-à-dire qu'il vaut 48,34.

Cela posé, dans le triangle rectangle CDB je cherche l'angle CBD, qui, étant une fois connu, fera connaître l'angle C; et pour trouver cet angle CBD, je fais cette proportion (295) $BC : CD :: R : \sin CBD$, c'est-à-dire $64 : 48,34 :: R : \sin CBD$.

Opérant par logarithmes,

Log de 48,34.......	1,6843066
Log du rayon.....................	10,0000000
Compl. arithm. du log de 64.......	8,1938200
Somme ou log sin CBD.....	19,8781266

qui dans les Tables répond à $49° 3'$; donc l'angle C est de $40° 57'$.

On peut résoudre ce même cas par cette autre règle, dont nous ne donnerons la démonstration que dans la troisième partie de ce Cours.

De la moitié de la somme des trois côtés retranchez successivement chacun des deux côtés qui comprennent l'angle cherché, ce qui vous donnera deux restes. Faites ensuite cette proportion :

Le produit des deux côtés qui comprennent l'angle cherché est au produit des deux restes, comme le carré du rayon est au carré du sinus de la moitié de l'angle cherché; ce qui, en employant les logarithmes, se réduit à cette règle.

Au double du logarithme du rayon, ajoutez les logarithmes des deux restes, et du tout retranchez la somme des logarithmes des deux côtés qui comprennent l'angle cherché; ce qui restera sera le logarithme du carré du sinus de la moitié de l'angle cherché; prenez la moitié de ce reste, ce sera (*Arith.*, 250) le logarithme de ce sinus, que vous chercherez dans les Tables; ayant alors la moitié de l'angle, il n'y aura plus qu'à doubler cette moitié.

Ainsi, dans l'exemple que nous venons de proposer, j'ajouterais les trois côtés 184, 64, 142, et de 195, moitié de leur somme, je retrancherais successivement 184 et 64, ce qui me

donnerait 11 et 131 pour restes. Alors ajoutant à 20,0000000, double du logarithme du rayon, les logarithmes 1,0413927, 2,1172713 des restes 11 et 131, j'aurais 23,1586640, duquel retranchant la somme 4,0709978 des logarithmes 1,8061800 et 2,2648178 des côtés 64 et 184, il me resterait 19,0876662, dont la moitié 9,5438331 est le logarithme du sinus de la moitié de l'angle C: on trouve dans les Tables que cette moitié est $20^\circ 28' \frac{1}{2}$ à peu près, dont le double est $40^\circ 57'$, comme ci-dessus.

En faisant usage des compléments arithmétiques, l'opération se réduit à l'addition suivante:

	20,0000000
	1,0413927
	2,1172713
	8,1938200
	7,7351822
Somme..........	39,0876662

Diminuant le premier chiffre de deux unités, on a le même résultat que par l'opération précédente, mais plus brièvement.

Cette proposition peut servir à calculer les distances, lorsqu'on n'a point d'instrument pour mesurer les angles; c'est le moyen de faire, par le calcul, ce qu'il était question de faire par lignes au n° **122**.

Le cas où l'on a à résoudre un triangle dont on connaît les trois côtés, peut arriver souvent lorsqu'on a à calculer plusieurs triangles dépendants les uns des autres.

303. *Dans tout triangle rectiligne, la somme de deux côtés est à leur différence, comme la tangente de la moitié de la somme des deux angles opposés à ces côtés est à la tangente de la moitié de leur différence;*

Car, selon ce qui a été dit (**299**), on a (*fig.* 156) AB : sin C :: AC : sin B; donc (**97**) AB + AC : AB — AC :: sin C + sin B : sin C — sin B; or (**286**), sin C + sin B : sin C — sin B :: tang $\frac{C+B}{2}$: tang $\frac{C-B}{2}$; donc AB + AC : AB — AC :: tang $\frac{C+B}{2}$: tang $\frac{C-B}{2}$.

306. Cette proposition sert à *résoudre un triangle dont on connaît deux côtés et l'angle compris*. Car si l'on connaît l'angle A, par exemple, on connaît aussi la somme des deux angles B et C, en retranchant l'angle A de 180°. Donc en prenant la moitié du reste qu'on aura par cette soustraction, et cherchant sa tangente dans les Tables, on aura avec les deux côtés AB et AC supposés connus, trois termes connus dans la proportion qu'on vient de démontrer; on pourra donc calculer le quatrième, qui fera connaître la moitié de la différence des deux angles B et C. Alors, connaissant la demi-somme et la demi-différence de ces angles, on aura (301) le plus grand en ajoutant la demi-différence à la demi-somme, et le plus petit, en retranchant au contraire la demi-différence de la demi-somme. Enfin ces deux angles étant connus, on aura aisément le troisième côté par la proposition enseignée (299).

Exemple. Supposons que le côté AB soit de 142 pieds, et le côté AC de 120, et l'angle A de 48°: on demande les deux angles C et B, et le côté BC.

Je retranche 48° de 180, et il me reste 132° pour la somme des deux angles C et B, et par conséquent 66° pour leur demi-somme.

Je fais cette proportion

$$142 + 120 : 142 - 120 :: \text{tang}\, 60^\circ : \text{tang}\, \frac{C-B}{2},$$

ou

$$262 : 22 :: \text{tang}\, 66^\circ : \text{tang}\, \frac{C-B}{2};$$

et, opérant par logarithmes,

Log tang 66°......................	10,3514169
Log 22..........................	1,3424227
Compl. arithm. du log de 262......	7,5816987
Somme ou log tang de la demi-diff...	19,2755383

qui dans la Table répond à 10° 41′.

Ajoutant cette demi-différence à la demi-somme 66°, et la retranchant de cette même demi-somme, j'aurai, comme on le voit ici,

	66° 0′
	10° 41′
L'angle C..............	76° 41′
	66° 0′
	10° 41′
L'angle B..............	55° 19′

Enfin, pour avoir le côté BC, je fais cette proportion, sin C : AB :: sin A : BC; c'est-à-dire sin 76° 41′ : 142ᵖ :: sin 48° : BC.

Opérant comme dans les exemples ci-dessus, on trouvera que BC vaut 108ᵖ,4.

307. Tels sont les moyens qu'on peut employer pour la résolution des triangles. Voici maintenant quelques exemples de l'application qu'on peut en faire aux figures plus composées.

308. Supposons que C et D (*fig.* 157) sont deux objets dont on ne peut approcher, mais dont on a cependant besoin de connaître la distance.

On mesurera une base AB, des extrémités de laquelle on puisse apercevoir les deux objets C et D. On observera au point A les angles CAB, DAB, que font avee la ligne AB les lignes AC, AD, qu'on imaginera aller du point A aux deux objets C et D; on observera de même au point B les angles CBA, DBA. Cela posé, on connaît dans le triangle CBA les deux angles CAB, CBA et le côté AB; on pourra donc calculer le côté AC, par ce qui a été dit (**300**). Pareillement, dans le triangle ADB, on connaît les deux angles DAB, DBA et le côté AB; ainsi on pourra, par le même principe, calculer le côté AD; alors, en imaginant la ligne CD, on aura un triangle CAD, dans lequel on connaît les deux côtés AC, AD qu'on vient de calculer, et l'angle compris CAD; car cet angle est la différence des deux angles mesurés CAB, DAB; on pourra donc calculer le côté CD (**306**).

309. On peut aussi, par ce même moyen, savoir quelle est la direction de CD, quoiqu'on ne puisse approcher de cette ligne. Car, dans le même triangle CAD, on peut calculer l'angle ACD, que CD fait avec AC: or, si par le point C on imagine une ligne

CZ parallèle à AB, on sait que l'angle ACZ est supplément de CAB, à cause des parallèles (40); donc, prenant la différence de l'angle connu ACZ à l'angle calculé ACD, on aura l'angle DCZ que CD fait avec CZ ou avec sa parallèle AB; et comme il est fort aisé d'orienter AB, on aura donc aussi la direction de CD.

310. Nous avons dit, en parlant des lignes (3), que nous donnerions le moyen de déterminer différents points d'un même alignement, lorsque des obstacles empêchent de voir les extrémités l'une de l'autre. Voici comment on peut s'y prendre.

On choisira un point C (*fig.* 158) hors de la ligne AB dont il s'agit, et qui soit tel qu'on puisse, de ce point, apercevoir les deux extrémités A et B; on mesurera les distances AC et CB, soit immédiatement, soit en formant des triangles dont ces lignes deviennent côtés, et qu'on puisse calculer comme dans l'exemple précédent (308). Alors, dans le triangle ACB, on connaîtra les deux côtés AC et CB, et l'angle compris ACB; on pourra donc (306) calculer l'angle BAC. Cela posé, on fera planter, selon telle direction CD qu'on voudra, plusieurs piquets; et ayant mesuré l'angle ACD, on connaîtra dans le triangle ACD le côté AC et les deux angles A et ACD; on pourra donc (300) calculer le côté CD; alors on continuera de faire planter des piquets dans la direction CD, jusqu'à ce qu'on ait parcouru une longueur égale à celle qu'on a calculée; et le point D, où l'on s'arrêtera, sera dans l'alignement des deux points A et B.

311. S'il n'était pas possible de trouver un point C, duquel on pût apercevoir à la fois les deux points A et B, on pourrait se retourner de la manière suivante.

On chercherait un point C (*fig.* 159), d'où l'on pût apercevoir le point B, et un autre point E, d'où l'on pût voir le point A et le point C. Alors mesurant ou déterminant, par quelque expédient tiré des principes précédents, les distances AE, EC et CB, on observerait au point E l'angle AEC, et au point C l'angle ECB. Cela posé, dans le triangle AEC, connaissant les deux

côtés AE, EC, et l'angle compris AEC, on calculerait, par ce qui a été dit (306), le côté AC et l'angle ECA; retranchant l'angle ECA de l'angle observé ECB, on aurait l'angle ACB; et comme on vient de calculer AC, et qu'on a mesuré CB, on retomberait dans le cas précédent, comme si les deux points A et B eussent été visibles du point C; on achèvera donc de la même manière.

312. S'il s'agit de mesurer une hauteur, et qu'on ne puisse approcher du pied, comme serait la hauteur d'une montagne (*fig.* 160), on mesurera sur le terrain une base FG, des extrémités de laquelle on puisse apercevoir le point A dont on veut connaître la hauteur; ensuite avec le graphomètre, dont BF et CG représentent la hauteur, on mesurera les angles ABC, ACB que font avec la base BC les lignes BA, CA qu'on imagine aller des deux points B et C au point A; enfin, à l'une des stations, en C par exemple, on disposera l'instrument comme on l'a fait dans l'exemple relatif à la *fig.* 150, et on mesurera l'angle ACD qui est l'inclinaison de la ligne AC à l'égard de l'horizon. Alors, connaissant dans le triangle ABC les deux angles ABC, ACB et le côté BC, il sera facile (300) de calculer le côté AC; et dans le triangle ADC, où l'on connaît maintenant le côté AC, l'angle mesuré ACD, et l'angle D qui est droit, puisque AD est la hauteur perpendiculaire, il sera facile de calculer AD, et on aura la hauteur du point A au-dessus du doint C. Si l'on veut savoir ensuite quelle est la hauteur du doint A au-dessus du point B ou de tout autre point environnant, il ne s'agira plus que de niveler ou de trouver la différence de hauteur entre les points C et B; c'est ce dont nous allons parler dans un moment.

313. Nous avons dit (183) que pour calculer la surface d'un segment AZBV (*fig.* 74) dont le nombre des degrés de l'arc AVB et le rayon sont connus, il fallait calculer la surface du triangle IAB, pour la retrancher de celle du secteur IAVB: c'est une chose facile actuellement; car, dans le triangle rectangle IZB,

on connaît, outre l'angle droit, le côté IB et l'angle ZIB, moitié de AIB, mesuré par l'arc AVB; on calculera donc facilement (298) IZ qui est la hauteur du triangle, et BZ qui est moitié de la base.

On peut encore conclure de ce qui précède, le moyen de faire un angle ou un arc d'un nombre déterminé de degrés et minutes. On tirera une droite CB (*fig.* 145) de grandeur arbitraire, que l'on prendra pour côté de l'angle; et ayant imaginé l'arc BDA décrit du point C, le rayon CA et la corde BA, si l'on imagine la perpendiculaire CI, et si l'on mesure CB, on connaîtra, dans le triangle rectangle CIB, l'angle droit, le côté CB et l'angle BCI, moitié de celui dont il s'agit; on pourra donc calculer BI, dont le double sera la valeur de la corde AB: ainsi, prenant une ouverture de compas égale à ce double du point B comme centre, on marquera le point A sur l'arc BDA, et tirant CA, on aura l'angle demandé.

Nous pourrions indiquer ici une infinité d'autres usages de la Trigonométrie; mais en voilà assez pour mettre sur la voie; d'ailleurs nous aurons assez d'occasions, par la suite, d'avoir recours à cette partie.

Usages de la Trigonométrie pour lever et tracer les plans.

L'art de tracer les plans consiste à déterminer sur le papier des points qui soient placés entre eux comme le sont sur le terrain des objets que ces points doivent représenter. On suppose alors que tous les objets dont il s'agit sont situés dans un même plan horizontal; mais s'ils n'y étaient pas, en sorte que les opérations qu'on aura faites pour déterminer les situations respectives de ces objets n'eussent pas été faites toutes dans un même plan horizontal ou à peu près, il faudrait, avant que de tracer le plan, ramener ces observations à ce qu'elles auraient été si on les eût faites dans un plan horizontal. Nous allons d'abord expliquer comment on doit s'y prendre quand les observations ont été faites dans un plan horizontal, ou y ont été réduites; nous ferons voir ensuite comment on les y réduit.

Soient donc A, B, C, D, E, F, G, H, I, K (*fig.* 75) plusieurs objets remarquables dont on veut représenter les positions respectives sur un plan.

On dessinera grossièrement sur un papier ces objets, dans les positions qu'on leur juge à l'œil; et pour cet effet on se transportera aux différents lieux où il sera nécessaire, pour prendre une connaissance légère de tous ces ob-

jets : ce premier dessin, qu'on appelle un *croquis* ou *brouillon*, servira à marquer les différentes mesures qu'on prendra dans le cours des opérations.

On mesurera une base AB, dont la longueur ne soit pas trop disproportionnée à la distance des objets les plus éloignés qu'on peut voir de ses extrémités, et qui soit telle en même temps, que de ces mêmes extrémités on puisse apercevoir le plus grand nombre d'objets que faire se pourra ; alors, avec le graphomètre, on mesurera au point A les angles EAB, FAB, GAB, CAB, DAB que font au point A, avec la base AB, les lignes qu'on imaginera menées de ce point aux objets E, F, G, C, D, qu'on suppose pouvoir être aperçus des extrémités A et B de la base : on mesurera de même, au point B, les angles EBA, FBA, GBA, CBA, DBA que font en ce point, avec la ligne AB, les lignes qu'on imaginera menées de ce même point B aux mêmes objets que ci-dessus.

S'il y a des objets, comme H, I, qu'on n'ait pas pu voir des deux extrémités A et B, on se transportera en deux des lieux E et F qu'on vient d'observer, et d'où l'on puisse voir ces objets H et I ; alors, regardant EF comme une base, on mesurera les angles HEF, IEF, HFE, IFE, que font avec cette nouvelle base les lignes qui iraient de ses extrémités aux deux objets H et I. Enfin, s'il y a quelque autre objet, comme K, qu'on n'ait pu voir, ni des extrémités de AB, ni de celles de EF, on prendra encore pour base quelque autre ligne, comme FG qui joint deux des points observés, et l'on mesurera de même, à ses deux extrémités, les angles KFG, KGF.

Cela posé, dans les triangles ACB, ADB, AEB, AFB, AGB, dans chacun desquels on connaît le côté AB et les deux angles adjacents à ce côté, il sera facile (**300**) de calculer les deux autres côtés.

A l'égard des triangles HEF, IEF, comme on n'y a mesuré que les angles sur EF, on commencera par calculer EF à l'aide du triangle EAF, dans lequel on connaît l'angle EAF, différence des deux angles observés EAB, FAB, et les côtés AE, AF qu'aura donnés le calcul précédent : il sera donc facile d'avoir EF, par ce qui a été dit (**306**) ; alors, dans chacun des triangles HEF, IEF, on connaîtra le côté EF et les deux angles adjacents : on calculera les deux autres côtés, comme il vient d'être dit pour les premiers. On se conduira de même pour le triangle KFG.

Ces calculs étant faits, on tirera (*fig.* 76) sur le papier une ligne *ab*, que l'on fera d'autant de parties de l'échelle qui doit déterminer la grandeur que l'on veut donner au plan, d'autant de parties, dis-je, qu'on a trouvé de toises ou de pieds dans AB, puis, pour déterminer l'un quelconque des points que l'on a pu voir des extrémités A et B de la base, le point E par exemple, on prendra sur l'échelle autant de parties que le calcul a donné de toises ou de pieds pour AE, et du point *a* comme centre, et d'un rayon *ae* égal à ce nombre de parties, on décrira un arc. On prendra pareillement sur l'échelle autant de parties qu'on a trouvé de toises ou de pieds dans BE, et du point *b* comme centre, et d'un rayon *be* égal à ce nombre de parties, on décrira un arc qui coupe celui qui a été décrit du rayon *ae*, en un point *e*,

lequel représentera sur le papier la position du point e à l'égard de *ab*, semblable à celle de E à l'égard de AB; car, par cette construction, le triangle *aeb* a les côtés proportionnels à ceux du triangle AEB; il lui est donc semblable. On s'y prendra de même pour déterminer les points *f*, *g*, *c*, *d*, qui doivent être la représentation des points F, G, C, D.

A l'égard des points *h*, *i*, *k*, qui doivent être la représentation des objets H, I, K, qui n'ont pu être aperçus des points A et B, les points e, *f*, *g*, ayant été déterminés comme il vient d'être dit, les lignes *ef* et *fg* serviront de base, comme *ab* en a servi pour *c*, *d*, e, *f*, *g*: en sorte que l'opération se réduira de même à tracer des points *e* et *f* comme centres, et des rayons *he*, *hf* qui contiennent autant de parties de l'échelle que HE et HF ont été trouvés (par le calcul) contenir de toises ou de pieds; à tracer, dis-je, deux arcs dont l'intersection *h* marquera le point H, et ainsi des autres. Alors la figure tracée sur le papier sera semblable au terrain que l'on a levé (**155**), puisqu'elle sera composée d'un même nombre de triangles que celui-ci, semblables à ceux de ces derniers et semblablement disposés: il ne s'agira plus que de dessiner, à chacun de ces points, les objets qu'on y aura remarqués; et l'on remplira les parties intermédiaires, qui demandent moins de scrupule, par les moyens dont nous parlerons plus bas.

Il faut observer encore que cette méthode devant être employée pour fixer les points principaux et fondamentaux du plan, il est à propos d'employer un graphomètre à lunettes, plutôt qu'un graphomètre à pinnules.

De la manière de réduire les angles observés dans des plans inclinés à l'horizon, à ceux qu'on observerait si les objets étaient dans un plan horizontal.

Lorsque, dans les opérations précédentes, les objets ne sont pas tous situés dans un même plan horizontal, il faut, avant que de former le plan qui doit les représenter, réduire les angles à ce qu'ils auraient été observés, si tous les objets eussent été dans un même plan horizontal. Voici comment cela peut s'exécuter.

Soient A, B, C (*fig.* 185) trois points différemment élevés au-dessus de l'horizon, et dont les hauteurs respectives soient AD, FB, CE; en sorte que FDE soit un plan horizontal: on a mesuré l'angle BAC; mais, comme le plan sur lequel on veut rapporter ces objets est FDE, on imagine que B est placé en F, A en D, et C en E, et l'on demande l'angle FDE.

A la station que l'on fera pour mesurer l'angle BAC, on mesurera aussi les angles BAD, CAD que font les rayons visuels AB, AC avec le fil-à-plomb au point A; ce que l'on fera comme il a été expliqué dans l'exemple I du n° **297**.

Cela posé, concevons que AB et AC prolongés, s'il est nécessaire, rencontrent le plan horizontal FDE aux points G et I; dans les triangles ADG, ADI, rectangles en D, si l'on regarde AD comme le rayon des Tables, DG

et DI seront les tangentes des angles observés GAD, IAD, et AG, AI en seront les sécantes; donc, si l'on prend dans les Tables les sécantes et les tangentes des angles GAD et IAD, on connaîtra: 1° dans le triangle GAI, les côtés GA et AI, et l'angle observé GAI; on pourra donc, par ce qui a été dit (**306**), calculer le côté GI; 2° dans le triangle GDI, on connaîtra les côtés GD et DI, et le côté GI que l'on vient de calculer; on pourra donc, par ce qui a été dit (**306**), calculer l'angle GDI.

On s'y prendrait d'une manière semblable pour réduire l'angle observé au point B; et lorsque dans un triangle on aura réduit deux angles, il sera inutile de faire un semblable calcul pour réduire le troisième, parce que les trois angles du triangle réduit ne pouvant valoir que 180°, le troisième sera toujours facile à avoir.

Ayant ainsi réduit les angles, il sera facile de réduire les distances, ou l'une d'entre elles (car il suffit d'en réduire une pour chaque triangle). En effet, si l'on imagine l'horizontale BO, dans le triangle BAO, rectangle en O, on connaît BA qui a été mesuré, l'angle droit et l'angle BAO; on aura donc (**295**) facilement BO ou FD.

On a trouvé l'angle BAC de 62° 37′, l'angle BAD de 88° 5′, et l'angle CAD de 78° 17′.

Je cherche dans les Tables les sécantes et les tangentes des angles BAD et CAD, et je trouve comme il suit, en négligeant les trois dernières décimales:

Séc	88° 5′	ou	AG........ 29,90
Séc	78.17	ou	AI........ 4,92
Tang	88. 5	ou	DG........ 29,88
Tang	78.17	ou	DI........ 4,82

Alors, dans le triangle AGI, je calcule (**306**) la demi-différence des deux angles AGI, AIG par cette proportion, AG + AI : AG − AI :: tang 58° 41′, demi-somme de ces deux angles, est à un quatrième terme; je trouve donc que cette demi-différence est 49° 42′, ce qui donne l'angle AGI de 8° 59′; d'où (**299**) on trouvera GI de 27,98.

Connaissant les trois côtés DG, DI, GI, on trouvera (**304**) que l'angle GDI est de 62° 27′.

Si les Tables dont on fait usage ne contenaient pas les sécantes, on les aurait néanmoins facilement par le principe donné (**278**).

Des méthodes par lesquelles on peut suppléer à la Trigonométrie, dans l'art de lever les plans.

L'usage du calcul trigonométrique, dans l'art de lever les plans, n'est indispensable que lorsque les points principaux de l'espace dont on veut former la carte sont à des distances assez considérables les uns des autres.

Mais lorsque les distances sont médiocres, après avoir mesuré une base et observé les angles, comme il vient d'être dit (page 188), au lieu de calculer les triangles pour former, à l'aide des côtés calculés et réduits à l'échelle du plan, des triangles semblables à ceux qu'on a observés sur le terrain, on se contente de former ces triangles semblables par le moyen des angles observés, ainsi que nous allons le dire.

Cette méthode est moins exacte que la précédente, en ce que le rapporteur, ou en général l'instrument que l'on emploie pour former sur le papier des angles égaux à ceux qu'on a observés sur le terrain, ne pouvant être que d'un assez petit rayon, on ne peut apporter, dans la formation de ces angles, la même précaution qu'on peut apporter en mesurant sur l'échelle la valeur que le calcul a déterminée pour les côtés.

Mais, comme il est peu ordinaire qu'on ait besoin d'une exactitude aussi scrupuleuse, et que d'ailleurs la méthode de rapporter les angles sur le papier est beaucoup plus expéditive, cette dernière doit être regardée comme étant d'un usage fort étendu et suffisamment exact. Elle consiste à tirer (*fig.* 76) une ligne *ab* qui contienne autant de parties de l'échelle du plan, qu'on a trouvé de mesures dans la base AB. Puis aux extrémités *a*, *b*, on fait les angles *cab*, *eba*, *fab*, *fba*, etc., égaux aux angles observés EAB, EBA, FAB, FBA, etc., que font avec la base AB les objets que l'on a pu voir des points A, B. Puis joignant les points *e*, *f*, par la droite *ef*, on forme aux extrémités de cette ligne, comme base, des angles égaux à ceux qu'on a observés des deux points E et F, et ainsi de suite.

On peut aussi se dispenser du calcul trigonométrique pour réduire à des angles horizontaux ceux qu'on aurait observés dans des plans inclinés à l'horizon. En voici la méthode.

Les mêmes observations étant supposées qu'à la page 188 pour la *fig.* 185, au point A (*fig.* 186) de la ligne quelconque AD, on fera les angles DAG, DAI égaux aux angles verticaux observés DAG et DAI de la *fig.* 185; au point quelconque D (*fig.* 186), on élèvera sur AD la perpendiculaire indéfinie IDG. Au point A, on mènera la ligne AM faisant avec AI l'angle IAM égal à l'angle BAC qu'il s'agit de réduire; et ayant fait AM égal à AG, on tirera IM. Puis du point I comme centre, et du rayon IM, du point D comme centre, et du rayon DG, on décrira deux arcs qui se coupent en O; l'angle IDO sera l'angle demandé.

De la Boussole, et de son usage pour lever les parties de détail d'un plan.

La principale pièce de la boussole (*fig.* 187) est une aiguille aimantée soutenue en son milieu par un pivot, sur lequel elle a toute la mobilité possible. Cette aiguille est renfermée dans une boîte de cuivre ou de bois. Sur le bord intérieur de cette boîte on marque les 360 degrés, et vers le bord extérieur et aux divisions 180 et 360 degrés, ou parallèlement à la ligne qui passe

par ces deux divisions, on place deux pinnules qui forment ensemble ce qu'on appelle la *visière*.

L'usage de la boussole est fondé sur la propriété qu'a l'aiguille aimantée de rester constamment dans une même position, et d'y revenir quand elle en a été écartée (du moins dans un même lieu et pendant un assez long intervalle de temps). D'où il suit que si l'on fait tourner la boîte de la boussole, on pourra juger de la quantité dont elle a tourné, en comparant le point de la graduation auquel l'aiguille répondra, à celui auquel elle répondait d'abord.

On applique assez ordinairement une boussole au graphomètre, non dans la vue de suppléer au graphomètre, mais pour *orienter* les objets, c'est-à-dire pour connaître, à environ un demi-degré, leur position à l'égard des quatre *points cardinaux*, ou à l'égard de la ligne *nord* et *sud*, avec laquelle l'aiguille aimantée fait constamment le même angle dans un même lieu, du moins pendant le cours d'environ une année.

La boussole est employée aux mêmes usages que le graphomètre, c'est-à-dire à la mesure des angles; mais plusieurs raisons ne permettent pas de donner beaucoup de longueur à l'aiguille; les degrés de la graduation occupent trop peu d'étendue sur l'instrument, pour qu'on puisse mesurer les angles avec autant de précision qu'avec le graphomètre: c'est ce qui fait qu'on n'emploie la boussole que pour déterminer les points de détail d'un plan ou d'une carte dont les points principaux ont été fixés par les moyens précédemment décrits.

Supposons donc qu'il s'agit de lever le cours d'une rivière, par exemple; on plantera des piquets aux coudes les plus sensibles A, B, C, D, E, F (*fig.* 188); et ayant placé la boussole au point A, en sorte que la visière soit dirigée le long de AB, on observera sur la graduation quel est le nombre des degrés compris entre la ligne AB et la direction actuelle de l'aiguille; puis on mesurera AB. On établira ensuite la boussole au point B; on dirigera de même la visière le long de BC, et l'on observera de même l'angle que BC forme avec BN, direction de l'aiguille qui est parallèle à la première direction AN; on mesurera BC, et l'on fera pareilles opérations à chaque détour. Ayant ainsi mesuré tous les angles et toutes les distances, on les rapportera sur le papier de la manière suivante.

On prendra arbitrairement le point *a* (*fig.* 189), qui doit représenter le point A, et l'on mènera arbitrairement la ligne *an*, pour représenter la direction de l'aiguille aimantée. Au point *a* on fera, à l'aide du rapporteur, l'angle *nab* égal à l'angle observé NAB, et l'on donnera à *ab* autant de parties de l'échelle du plan qu'on a trouvé de mesures pour AB. Au point *b* on mènera *bn* parallèle à *an*, et l'on fera l'angle *nbc* égal à l'angle observé NBC, et l'on donnera à *bc* autant de parties de l'échelle qu'on a trouvé de mesures pour BC. On continuera de même pour tous les autres points, après quoi l'on figurera les parties intermédiaires à peu près telles qu'on les a jugées à la vue.



Ce que nous disons des détours d'une rivière s'applique évidemment aux détours d'un chemin, à l'enceinte d'un bois, aux contours d'un marais, etc. (1).

De la Planchette, et de son usage pour lever les plans.

Il y a encore une autre manière de lever, qui est d'autant plus commode, qu'elle exige peu d'appareil, et qu'en même temps qu'on observe les différents points dont on veut avoir les positions, on les trace sur le plan sans les perdre de vue. L'instrument qu'on emploie à cet effet est représenté par la *fig.* 78. ABCD est une planche de 16 à 18 pouces de long, et à peu près de pareille largeur, portée sur un pied comme le graphomètre. Sur cette planche on étend une feuille de papier, qu'on arrête par le moyen d'un châssis qui entoure la planche. LM est une règle garnie de pinnules placées à ses deux extrémités et dans un alignement parallèle au bord de la règle.

Lorsqu'on veut faire usage de cet instrument, qu'on appelle *planchette*, pour tracer le plan d'une campagne, on prend une base mn, comme dans les opérations ci-dessus, et, posant le pied de l'instrument en m, on fait planter un piquet en n. On applique la règle LM sur le papier, et on la dirige de manière à voir le piquet placé en n à travers les deux pinnules : alors on tire le long de la règle une ligne EF, à laquelle on donne autant de parties de l'échelle du plan, qu'on aura trouvé de mesures entre le point E, d'où l'on observe d'abord, et le point f, d'où l'on observera à la seconde station. On fait ensuite tourner la règle autour du point E, jusqu'à ce qu'on rencontre, en regardant au travers des pinnules, quelqu'un des objets I, H, G ; et à mesure qu'on en rencontre un, on tire le long de la règle une ligne indéfinie. Ayant ainsi parcouru tous les objets qu'on peut voir lorsqu'on est en m, on transporte l'instrument en n, et on laisse un piquet en m; alors on fait au point n les mêmes opérations à l'égard des objets I, H, G, qu'on a faites à l'autre station. Les lignes fi, fh, fg, qui dans ce second cas vont ou sont imaginées aller à ces objets, rencontrent les premières aux points g, h, i, qui sont la représentation des objets G, H, I.

La planchette s'emploie principalement pour lever les détails d'un pays dont les points principaux ont déjà été déterminés exactement par les moyens ci-dessus, et rapportés ensuite sur le papier, ou pour ajouter à une carte déjà construite des objets dont la position aurait été omise.

Par exemple, supposant que A, B, C (*fig.* 190) sont des points qui ont été déjà déterminés et marqués sur la carte en a, b, c, que D soit un point dont la position est inconnue; voici comment avec la planchette on déter-

(1) Pour représenter les montagnes, les champs, les vignes, les bois et toutes les autres cultures, on pourra consulter les *Principes du dessin et du lavis de la carte topographique*, par F.-C Marie. Paris, 1825.

minera sa position *d*. On établira la planchette au point D, et on l'orientera de la manière qui va être expliquée ci-dessous; alors on dirigera l'alidade dans l'alignement A*a*, et ensuite dans l'alignement B*b*, et traçant une ligne le long de l'alidade, dans chaque alignement, la rencontre *d* marquera sur la carte la position du point D à l'égard des objets A, B, C. On vérifiera cette position en dirigeant l'alidade suivant C*c*, et observant si cette ligne prolongée passe par le point *d*.

On marque ordinairement sur la carte la direction de l'aiguille aimantée, et pour cet effet on emploie une boussole de figure rectangulaire (1), telle qu'on voit (*fig.* 191), dont la largeur est environ le tiers de la longueur; dans le milieu du fond est gravée une ligne parallèle au long côté de la boîte: c'est sur cette ligne qu'est placé le pivot qui porte l'aiguille.

Pour marquer sur le plan la direction de l'aiguille aimantée, on établit l'alidade de la planchette dans l'alignement de deux objets marqués sur ce plan, et de manière que la représentation de ces objets sur le plan soit sur ce même alignement: alors on place la boussole sur la planchette, et on la tourne jusqu'à ce que l'aiguille s'arrête dans la ligne nord et sud de la boîte, c'est-à-dire dans la ligne du milieu du fond de la boîte; enfin, on trace une ligne selon la direction du long côté de la boîte: c'est la direction de l'aiguille.

Réciproquement, lorsque la direction de l'aiguille est marquée sur la carte, et qu'on veut donner à la carte ou à la planchette la même disposition qu'ont les objets sur le terrain, il ne s'agit que de faire accorder la ligne nord et sud de la carte avec la ligne nord et sud de la boussole.

Au lieu de déterminer la position des objets par deux stations, comme nous l'avons expliqué ci-dessus pour la *fig.* 78, on se contente souvent d'une seule station; mais alors on mesure pour chaque objet la distance de la planchette à cet objet, et on la rapporte en parties de l'échelle du plan, le long de la règle dirigée sur cet objet.

Du Nivellement.

314. Plusieurs observations démontrent que la surface de la terre n'est point plane comme elle le paraît, mais courbe, et même sphérique, ou à très-peu de chose près sphérique. Lorsqu'un vaisseau commence à découvrir une côte, les premiers objets qu'on remarque sont les objets les plus élevés. Or, si la surface de la terre était plane, en même temps qu'on découvre la tour B (*fig.* 161), on devrait apercevoir tout le terrain adja-

(1) Qui prend alors le nom de *déclinatoire*.

cent ABC. Ce qui fait qu'il n'en est pas ainsi, c'est que la surface DAC de la terre s'abaisse de plus en plus à l'égard de la ligne horizontale DB du vaisseau. Deux points D et B peuvent donc paraître dans une même ligne horizontale DB, quoiqu'ils soient fort inégalement éloignés de la surface, et par conséquent du centre T de la terre. Ce qu'on appelle *ligne horizontale*, c'est une ligne tirée dans un plan qui touche la surface de la mer, ou parallèlement à ce plan qu'on appelle *plan horizontal;* et une *ligne verticale* est une perpendiculaire à un plan horizontal.

Ce qu'on appelle *niveler*, c'est de déterminer de combien un objet est plus éloigné qu'un autre à l'égard du centre de la terre.

315. Lorsque l'un de ces objets, vu de l'autre, paraît dans la ligne horizontale qui part de celui-ci, alors ils sont différemment éloignés du centre de la terre. Pour connaître cette différence, il faut remarquer que la distance à laquelle on peut apercevoir un objet terrestre, ou du moins que la distance à laquelle on observe dans le nivellement, est toujours assez petite pour que cette distance DI (*fig* 162), mesurée sur la surface de la terre, puisse être regardée comme égale à la tangente DB : or, on a vu (**129**) que la tangente BD était moyenne proportionnelle entre toute sécante menée du point B, et la partie extérieure BI de cette même sécante; mais, à cause de la petitesse de l'arc DI, on peut regarder la sécante qui passe par le point B et le centre T, comme égale au diamètre, c'est-à-dire au double de IT, ou au double de DT; donc BI sera le quatrième terme de cette proportion, 2DT : DI :: DI : BI.

Supposons, par exemple, que DI, mesuré sur la surface de la terre, soit de 1 000 toises ou 6000 pieds, comme le rayon de la terre est de 19611500 pieds, on trouvera BI par cette proportion, 39223000 : 6000 :: 6000 : BI. En faisant le calcul, on trouve $0^{p},91783$, qui reviennent à $11^{po}\,1^{l}\,2^{pts}$; c'est-à-dire qu'entre deux objets B et D éloignés de mille toises, et qui seraient dans une même ligne horizontale, la différence BI de niveau ou de distance au centre de la terre est de $11^{po}\,1^{l}\,2^{pts}$.

316. Quand on a calculé une différence de niveau comme BI,

on peut calculer plus facilement celles qui répondent à une moindre distance, en faisant attention que les distances BI, *bi* sont presque parallèles et égales aux lignes DQ, D*q*, qui (**170**) sont entre elles comme les carrés des cordes ou des arcs DI, D*t*; car ici les cordes et les arcs peuvent être pris l'un pour l'autre : ainsi, pour trouver la différence *bi* du niveau, qui répondrait à 5000 pieds, je ferai cette proportion, $\overline{6000}^2 : \overline{5000}^2 :: 0,91783 : bi$, que je trouve, en faisant le calcul, de 0,63738 ou $7^{p}\,7^{l}\,9^{pts}\,\frac{2}{5}$.

317. Ces notions supposées, pour connaître la différence de niveau de deux points B et A (*fig.* 163) qui ne sont point dans la ligne horizontale menée par l'un d'entre eux, on emploiera un instrument propre à mesurer les angles, que l'on disposera comme il a été dit dans l'exemple 1 du n° **297**, relatif à la *fig.* 150 ; on observera l'angle BCD, et ayant mesuré la distance CD ou CI à l'aide d'une chaîne qu'on tend horizontalement et à diverses reprises au-dessus du terrain ABE, on pourra, dans le triangle CDB, considéré comme rectangle en D, calculer BD, auquel on ajoutera la hauteur CA de l'instrument, et la différence DI de niveau, calculée par ce qui vient d'être dit (**315** et **316**).

Mais comme cette manière d'opérer suppose une grande exactitude dans la mesure de l'angle BCD et un instrument bien exact, on préfère souvent d'aller au même but par la voie plus longue que nous allons décrire.

L'usage de cet instrument exige une autre pièce que l'on appelle la *mire*. C'est un carton ou une feuille de fer-blanc (*fig.* 164), d'environ un pied en carré, partagé en deux également par une ligne horizontale MN qui sépare la partie inférieure noircie de la partie supérieure qui reste blanche. On attache ce carton sur une règle, de manière que MN soit perpendiculaire à la longueur de la règle. Celle-ci doit entrer à coulisse dans une rainure, le long d'une double toise OP divisée en pieds, pouces et lignes ; la règle, en parcourant ainsi la rainure, permet de porter la ligne de mire où il en est besoin, et de l'y fixer.

Pour faire usage de ce niveau, on le place à distances à peu près égales des deux points dont on veut avoir la différence de niveau. Il n'est pas nécessaire que ce soit dans l'alignement de ces deux points. On pose la mire successivement à chacun de ces points, de manière que la double toise soit verticale.

On hausse ou baisse la mire MN, jusqu'à ce que l'observateur, qui est au niveau CABD, aperçoive la ligne MN dans le prolongement de la ligne CD: alors la différence de hauteur de la mire MN, dans chacune de ces deux positions, sera la différence de niveau des deux points dont il s'agit.

Si l'on trouve, par exemple, qu'à l'un de ces points la ligne de mire MN a été élevée jusqu'à $4^p 8^{po}$, et qu'à l'autre elle ait été élevée jusqu'à $3^p 9^{po}$, on en conclura que la différence du niveau de ces deux points est de 11 pouces.

On s'y prendra de même pour tous les autres points qui seront à peu près à la même distance de la même station, qui pourront en être aperçus, et dont la différence du niveau avec CD n'excédera pas celle que l'on peut mesurer avec la double toise OP.

Mais lorsque les autres objets seront trop éloignés, ou que la différence du niveau sera trop grande, on prendra à la seconde station l'un des points qu'on a nivelés à la première, afin d'y comparer les autres, et l'on se placera, autant qu'on le pourra, en un lieu qui soit à peu près également éloigné de ce point et des autres.

Si l'on ne pouvait pas se placer à distances égales, ou à peu près égales des points qu'on veut niveler, alors la différence de niveau entre deux points quelconques ne serait pas exprimée par la différence des hauteurs de la ligne de mire à chaque point, parce que la différence du niveau vrai au niveau apparent n'est la même qu'à des distances égales: c'est pourquoi il faudrait, de la hauteur observée pour chaque point, retrancher la *correction du niveau*, c'est-à-dire la différence du niveau vrai au niveau apparent.

Par exemple, si la mire est placée à 250 toises ou 1500 pieds, et que l'on ait trouvé $4^p 8^{po}$ pour la hauteur de la ligne de mire, au lieu de $4^p 8^{po}$ on ne comptera que $4^p 7^{po} 4^l$, en retranchant 8 lignes qui est la correction du niveau trouvé par ce qui a été dit (315 et 316).

318. On emploie à cet effet un instrument tel que le représente la *fig.* 164. C'est un tuyau creux de fer-blanc ou d'un autre métal, coudé en A et en B. Dans les deux parties éminentes et égales AC, BD, on fait entrer deux tuyaux de verre I et K, mastiqués avec les parties AC et BD. On remplit d'eau tout le canal jusqu'à ce qu'elle s'élève dans les deux tuyaux de verre : quand elle est à égale hauteur dans chacun, on est sûr que la ligne qui passe par la superficie de l'eau élevée dans chacun des deux tuyaux est une ligne horizontale, et on l'emploie de la manière suivante.

On fait plusieurs stations, par exemple aux points D, C, B (*fig.* 165) : ayant fait élever aux deux points A et N deux jalons, l'observateur, qui est en D, vise successivement à chacun de

ces deux jalons, et fait marquer les deux points E et F, qu'on nomme points de *mire*. Faisant ensuite planter un autre jalon en quelque point P au delà de C, on fait marquer de même les deux points de mire G et H; on mesure à chaque station les hauteurs AE, GF, IH, etc., et après leur avoir appliqué (316) la correction de niveau qui convient aux distances KE, KF, LG, etc., estimées grossièrement, on ajoute ces hauteurs, et l'on a la différence de niveau entre A et B.

Si dans le cours de ces opérations on n'allait pas toujours en montant, on sent bien qu'au lieu d'ajouter, il faudrait retrancher les quantités dont on a descendu.

Comme nous ne nous proposons pas de donner ici un traité détaillé du nivellement, nous ne nous arrêterons pas à décrire les autres méthodes et les autres instruments qu'on peut employer.

On peut voir, sur cette matière, le *Traité de Topographie, d'Arpentage et de Nivellement* de M. Puissant. Paris, 1820.

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

319. Un triangle sphérique est une partie de la surface de la sphère, comprise entre trois arcs de cercle, qui ont tous trois pour centre commun le centre de la sphère, et qui sont par conséquent trois arcs de grands cercles de cette même sphère.

Si des trois angles A, F, G, du triangle sphérique AFG (*fig.* 166), on imagine trois rayons AC, FC, GC, menés au centre C de la sphère, on peut se représenter l'espace CAFG comme une pyramide triangulaire qui a son sommet C au centre de la sphère, et dont la base AFG est courbe, et fait partie de la surface de cette sphère. Les arcs AF, FG, AG, qui sont les côtés curvilignes de la base, sont les rencontres de la surface de la sphère avec les plans ACF, FCG, GCA qui forment les faces de cette pyramide.

L'angle A, compris entre les deux arcs AF, AG, se mesure par l'angle rectiligne IAK compris entre les tangentes AI, AK de ces deux arcs. Chacune de ces tangentes est dans le plan de l'arc auquel elle appartient, et elles sont toutes deux perpendiculaires au rayon CA (**48**), qui est l'intersection des deux plans ACF, ACG; donc (**191**) l'angle compris entre ces deux tangentes est le même que l'angle compris entre les plans ACF, ACG des deux arcs; donc,

320. 1°. *Un angle sphérique quelconque* FAG *n'est autre chose que l'angle compris entre les plans de ses deux côtés* AF, AG.

321. 2°. *Les angles que forment les arcs de grand cercle qui se rencontrent sur la surface d'une sphère, ont les mêmes pro-*

priétés que les angles plans, c'est-à-dire les propriétés énoncées (**192**, **193** et **194**).

322. Donc *deux côtés d'un triangle sphérique sont perpendiculaires entre eux, quand les plans qui les renferment sont perpendiculaires entre eux.*

Si l'on conçoit les deux plans ACG, ACF prolongés indéfiniment dans tous les sens, il est visible que la section que chacun formera dans la sphère sera un grand cercle, et que ces deux grands cercles se couperont mutuellement en deux parties égales aux points A et D de l'intersection commune AC prolongée; car les deux plans passant par le centre ont pour intersection commune un diamètre de la sphère.

323. Donc *deux côtés contigus* AG, AF *d'un triangle sphérique ne peuvent plus se rencontrer qu'à une distance* AGD *ou* AFD *de* 180° *depuis leur origine.*

324. Si l'on prend les deux arcs AB, AE chacun de 90°, et que par les deux points B et E et le centre C on conduise un plan dont la section avec la sphère forme le grand cercle BENMO, je dis que ce cercle sera perpendiculaire aux deux cercles ABD, AED.

Car, si l'on tire les rayons BC, EC, les angles ACB, ACE, qui ont pour mesure les arcs AB, AE de 90° chacun, seront droits; donc la ligne AC est perpendiculaire aux deux droites CE, BE; donc (**180**) elle est perpendiculaire à leur plan, c'est-à-dire au cercle BENMO; donc les deux cercles AED, ABD, qui passent par la droite AD, sont aussi perpendiculaires à ce même cercle (**184**); donc réciproquement ce cercle leur est perpendiculaire.

Comme nous n'avons supposé aucune grandeur déterminée à l'angle GAF ou EAB, il est visible que la même chose aura toujours lieu, quelle que soit la grandeur de cet angle, et que par conséquent le cercle BENMO est perpendiculaire à tous les cercles qui passent par la droite AD.

La droite AD s'appelle l'*axe du cercle* BENMO, et les deux points A et D, qui sont chacun sur la surface de la sphère, sont dits les *pôles* de ce même cercle.

325. Concluons donc, 1° *que les pôles d'un grand cercle quelconque sont également éloignés de tous les points de la circonférence de ce grand cercle; et leur distance à chacun de ces points, mesurée par un arc de grand cercle, est un arc de 90°.*

Et réciproquement, *si un point quelconque* A *de la surface de la sphère se trouve éloigné de 90° de deux points* B *et* E *pris dans un arc de grand cercle, ce point* A *est le pôle de ce grand cercle.*

326. 2°. Que *quand un arc* BF *de grand cercle est perpendiculaire sur un autre arc* BE *de grand cercle, il passe nécessairement par le pôle de celui-ci, ou du moins il y passerait étant prolongé suffisamment.*

327. 3°. Que *si deux arcs* BF, EG *de grand cercle sont perpendiculaires à un troisième arc de grand cercle* BE, *le point* A, *où ils se rencontrent, est le pôle de celui-ci.*

328. Puisque les deux droites BC, EC sont perpendiculaires au même point C de la droite AD, l'angle BCE qu'elles forment est donc (191) la mesure de l'inclinaison des deux plans ABD, AED, ou de l'angle sphérique EAB ou GAF; donc,

Un angle sphérique GAF *a pour mesure l'arc* BE *de grand cercle, que ses côtés, prolongés s'il est nécessaire, comprennent à la distance de 90° depuis le sommet.*

329. Si l'on conçoit que le demi-cercle ABD tourne autour du diamètre AD, et que des différents points R, B, H de sa circonférence on abaisse sur AD les perpendiculaires RQ, BC, HP, il est évident,

1°. Que *chacun de ces points décrit une circonférence de cercle, qui a pour centre le point de* AD *sur lequel tombe cette perpendiculaire, et pour rayon cette perpendiculaire même;*

2°. Que *les arcs* BS, BE, HL, *décrits dans ce mouvement et interceptés entre les deux plans* ABD, AED, *sont tous d'un même nombre de degrés;* car si l'on tire les lignes SQ, EC, LP, elles seront toutes perpendiculaires sur AD, puisqu'elles ne sont autre chose que les rayons RQ, BC, HP parvenus dans

le plan AED; donc (191) chacun des angles RQS, BCE, HPL, ou chacun des arcs RS, BE, HL, mesure l'inclinaison de deux plans ABD, AED; donc tous ces arcs sont d'un même nombre de degrés;

3°. Que *les longueurs de ces arcs* RS, BE, HL *sont proportionnelles aux sinus des arcs* AR, AB, AH, *qui mesurent leurs distances à un même pôle* A, *ou, ce qui revient au même, aux cosinus de leurs distances au grand cercle auquel ils sont parallèles;* car il est évident que ces arcs étant semblables sont proportionnels à leurs rayons RQ, BC, HP, qui sont évidemment les sinus des arcs A, AB, AH, ou les cosinus des arcs BR, zéro, et BH.

330. Si l'on imagine que la sphère ABDMOBN représente la terre, et AD son axe ou celui de ses diamètres autour duquel elle fait sa révolution journalière, le cercle BENMO, également éloigné des deux pôles A et D, est ce qu'on appelle l'*équateur.* Les cercles ABD, AED et tous leurs semblables, dont les plans passent par l'axe AD, se nomment des *méridiens;* les petits cercles dont RS, HL représentent ici des parties, se nomment des *parallèles à l'équateur,* ou semplement des *parallèles.* Les arcs BH, EL qui mesurent la distance d'un parallèle jusqu'à l'équateur, s'appellent la *latitude* de ce parallèle ou d'un lieu qui serait situé sur sa circonférence.

Pour déterminer la position d'un lieu sur la terre, on le rapporte à deux cercles fixes perpendiculaires entre eux, tels que ABDM, BENMO, en cette manière. On prend pour cercle de comparaison un méridien ABDM qui passe par un lieu connu et déterminé; et pour fixer la position d'un autre lieu L, on imagine par celui-ci un autre méridien AELD. Il est visible que la position de ce méridien est conuue, si l'on sait quel est le nombre de degrés de l'arc BE compris entre le point B et le point E, où ce même méridien rencontre l'équateur. Le point B étant donc le point fixe auquel on rapporte tous les autres méridiens, l'arc BE s'appelle alors la

longitude (1) du méridien AED, et de tous les lieux situés sur ce même méridien : il ne s'agit donc plus, pour déterminer la position du lieu L, que de connaître le nombre des degrés de l'arc EL ; ce qu'on appelle la *latitude* du lieu L, et qui est aussi la latitude de tous les lieux situés sur le parallèle dont HL fait partie.

On voit par là que tous les lieux situés sur un même méridien ont une même longitude, et que tous ceux qui sont situés sur une même parallèle ont une même latitude ; mais il n'y a qu'un seul point L, au moins dans une même moitié de la sphère ou dans un même hémisphère, qui puisse avoir en même temps une longitude et une latitude proposées. La position d'un lieu est donc déterminée, quand on connaît sa longitude et sa latitude ; mais pour la latitude, il faut savoir de plus vers quel pôle on la compte. Ainsi, supposant que le pôle A soit celui du midi ou le pôle *austral*, et D le pôle du nord ou le pôle *boréal*, il faut savoir si la latitude est australe ou boréale ; car on conçoit aisément qu'il peut y avoir et qu'il y a, en effet, un point dans l'hémisphère austral, qui est situé de la même manière que le point L l'est dans l'hémisphère boréal.

La longueur terrestre d'un degré de grand cercle est de 20 lieues marines, c'est-à-dire de 20 lieues de 2853 toises chacune : ainsi, si l'on avance sur l'équateur, à chaque 20 lieues on change d'un degré en longitude ; et si l'on marche sur un même méridien, à chaque 20 lieues on change d'un degré en latitude. Mais si l'on marche sur une parallèle à l'équateur, il est évident qu'à chaque 20 lieues on change de plus d'un degré en longitude, et d'autant plus que le parallèle sur lequel on s'avance est plus éloigné de l'équateur, c'est-à-dire est par une plus grande latitude. Pour trouver à combien de degrés

(1) On est dans l'usage de compter les longitudes d'occident en orient ; le cercle d'où l'on part pour compter les longitudes s'appelle *premier méridien* ; les Français ont choisi celui qui passe par l'île de Fer, la plus occidentale des Canaries.

de longitude répond un certain nombre de lieues HL parcourues sur un parallèle connu, il faut faire cette proportion : *Le cosinus de la latitude est au rayon, comme le nombre de lieues parcourues sur le parallèle est à un quatrième terme* qui sera le nombre de lieues de l'arc correspondant BE de l'équateur qui marque le changement en longitude. C'est une suite immédiate de ce qui a été dit (329). Par exemple, supposant que, par la latitude de 47°20', on a couru 18 lieues sur un parallèle à l'équateur, si l'on demande combien on a changé en longitude, on fera cette proportion, cos 47° 20', ou sin 42° 40' : R :: 18l est à un quatrième terme qu'on trouvera de 26l,56, lesquelles étant divisées par 20, à raison de 20 lieues par degré, donnent 1°,328, ou 1° 19' 41" à peu près pour le changement en longitude.

Revenons aux propriétés de la sphère.

331. Supposons que AFIG, BFHG (*fig.* 167) sont deux grands cercles de la sphère, et ABDEIH un troisième grand cercle qui coupe perpendiculairement ces deux-là; il suit de ce qui a été dit (326), que le grand cercle ABDEIH passe par les pôles des deux cercles, AFIG, BFHG; soient D et E ces pôles, et DK, EL les deux axes; puisque les angles ACD, BCE sont droits, si de chacun on retranche l'angle commun BCD, les angles restants ACB, DCE seront égaux, et par conséquent aussi les arcs AB, DE; donc *l'arc* DE, *qui mesure la plus courte distance des pôles de deux grands cercles, est égal à l'arc* AB *qui mesure le plus petit des deux angles que l'un de ces cercles fait avec l'autre.*

Propriétés des triangles sphériques.

332. Il est évident que, par deux points pris sur la surface d'une sphère, on ne peut faire passer qu'un seul arc de grand cercle; car ce grand cercle est l'intersection de la sphère par un plan qui est assujetti à passer par le centre : or, il est évident que par trois points donnés on ne peut faire passer qu'un seul plan.

333. Quoiqu'un triangle sphérique puisse avoir quelques-unes de ses parties de plus de 180°, néanmoins nous ne considérerons que ceux dont chacune des parties est moindre que 180°, parce qu'on peut toujours connaître l'un de ces triangles par l'autre. Par exemple, si l'on se représente le triangle ABEMV (*fig.* 166) formé par les arcs quelconques AB, AV, et par l'arc BMV de plus de 180°; en imaginant le cercle entier BMVB, on pourra substituer le triangle BOVA, dont l'arc BOV est moindre que 180°, au triangle ABEMV, parce que les parties du premier sont, ou égales à celles du second, ou leur supplément à 180° ou à 360°; en sorte que l'un de ces triangles est connu par l'autre.

334. *Chaque côté d'un triangle sphérique est plus petit que la somme des deux autres.*

Cela est évident.

335. *La somme des trois côtés d'un triangle sphérique est toujours moindre que* 360°.

Car il est évident (334) que FG est plus petit que AG + AF : or, AG + AF ajoutés avec DG + DF ne font que 360°; donc AG + AF ajoutés avec FG feront moins que 360°.

336. *Soient* ABC (fig. 168) *un triangle sphérique quelconque;* DEF *un autre triangle sphérique tel que le point* A *soit le pôle de l'arc* EF; *le point* C, *le pôle de l'arc* DE, *et le point* B, *le pôle de l'arc* DF; *chaque côté du triangle sera supplément de l'angle qui lui est opposé dans le triangle* ABC, *et chaque angle de ce même triangle* DEF *sera supplément du côté qui lui est opposé dans le triangle* ABC.

Car, puisque le point A est le pôle de l'arc EF, le point E doit être éloigné du point A de 90° (325); par la même raison, puisque C est le pôle de l'arc DE, le point E doit être à 90° du point C; donc (325) le point E est le pôle de l'arc AC : on prouvera de même que D est le pôle de BC, et F le pôle de AB.

Cela posé, prolongeons les arcs AC, AB jusqu'à ce qu'ils rencontrent l'arc EF en G et H. Puisque le point E est pôle de

ACG, l'arc EG est de 90°; et puisque F est pôle de ABH, l'arc FH est de 90°; donc G + FH ou EG + FG + GH ou EF + GH est de 180°; or, GH est la mesure de l'angle A (328), puisque les arcs AG, AH sont de 90°; donc EF + A est de 180°; donc EF est supplément de l'angle A. On prouvera de la même manière que DE est supplément de C, et DF supplément de B.

Prolongeons l'arc AB jusqu'à ce qu'il rencontre DF en I. Les deux arcs AH et BI sont chacun de 90°, puisque A et B sont les pôles des arcs EF, DF; donc AH + BI ou AH + AB + AI ou HI + AB est de 180°; mais HI est la mesure de l'angle F (328), puisque le point F est pôle de HI; donc F + AB est de 180°; donc F est supplément de AB. On prouvera de même que E est supplément de AC, et D supplément de BC.

337. Concluons de là que *la somme des trois angles d'un triangle sphérique vaut toujours moins que 540°, ou que trois fois 180°, et plus que 180°.*

Car la somme des trois angles A, B, C, avec la somme des trois côtés EF, DF, DE, vaut trois fois 180° (336); donc, 1° la somme des trois angles A, B, C est moindre que trois fois 180° ou que 540°; 2° la somme des trois côtés EF, DF, DE est (335) moindre que 360°, ou deux fois 180°; donc il reste plus de 180° pour la somme des trois angles A, B, C.

338. *Un triangle sphérique peut donc avoir ses trois angles droits, et même ses trois angles obtus.*

On voit donc que la somme des trois angles d'un triangle sphérique n'est pas une quantité qui soit toujours la même, comme dans les triangles rectilignes, et par conséquent on ne peut pas, de deux angles connus, conclure le troisième.

339. Comme les parties d'un triangle DEF sont chacune supplément de celle qui lui est opposée dans le triangle ABC, il s'ensuit que l'un de ces triangles peut être résolu par l'autre, puisque connaissant les parties de l'un, on a celles de l'autre. Nous ferons usage de cette remarque; et comme les deux

triangles ABC, DEF reviendront souvent, nous nommerons le triangle DEF *triangle supplémentaire*, pour abréger le discours.

340. *Deux triangles sphériques tracés sur une même sphère ou sur des sphères égales, sont égaux : 1° lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; 2° lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun ; 3° lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun; 4° lorsqu'ils ont les trois angles égaux chacun à chacun.*

Les trois premiers cas se démontrent précisément de la même manière que pour les triangles rectilignes. (*Voyez* 80, 81 et 83.)

A l'égard du quatrième, comme il n'a pas lieu pour les triangles rectilignes, il exige une démonstration à part. La voici :

Concevez que pour chacun des deux triangles ABC et *abc* (*fig.* 168 et 169) on ait tracé le triangle supplémentaire DEF et *def*. Si les angles A, B, C sont égaux aux angles *a*, *b*, *c*, chacun à chacun, les côtés EF, DF, DE, suppléments des premiers angles, seront donc égaux aux côtés *ef*, *df*, *de*, suppléments des derniers ; donc, par le troisième des quatre cas qu'on vient d'énoncer, ces deux triangles DEF et *def* seront parfaitement égaux; donc les angles D, E, F seront égaux aux angles *d*, *e*, *f*, chacun à chacun; donc les côtés BC, AC, AB, suppléments de ces trois premiers angles, seront égaux aux côtés *bc*, *ac*, *ab*, suppléments des trois derniers.

341. *Dans un triangle sphérique isocèle, les deux angles opposés aux côtés égaux sont égaux; et réciproquement, si deux angles d'un triangle sphérique sont égaux, les côtés qui leur sont opposés sont aussi égaux.*

Prenez sur les côtés égaux AB, AC (*fig.* 170) les arcs égaux AD, AE, et concevez les arcs de grand cercle DC, BE; les deux triangles ADC, AEB, qui ont alors un angle commun

compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, seront égaux (340). Donc l'arc BE est égal à l'arc CD; donc les deux triangles BDC et BEC sont égaux, puisque, outre DC égal à BE comme on vient de le voir, ils ont de plus le côté BC commun, et que d'ailleurs les parties BD, CE sont égales, puisque ce sont les restes de deux arcs égaux AB, AC, dont on a retranché des arcs égaux AD, AE. De ce que ces deux triangles sont égaux, on peut donc conclure que l'angle DCB ou ABC est égal à l'angle ECB ou ACB.

Quant à la seconde partie de la proposition, elle est une suite de la première, en imaginant le triangle supplémentaire; car, si les deux angles B et C (*fig.* 168) sont égaux, leurs suppléments DF, DE seront égaux; le triangle DEF sera donc isocèle; donc les angles E et F seront égaux; donc leurs suppléments AC et AB sont égaux.

342. *Dans tout triangle sphérique* ABC (fig. 171), *le plus grand côté est opposé au plus grand angle, et réciproquement.*

Si l'angle B est plus grand que l'angle A, on pourra conduire en dedans du triangle un arc BD de grand cercle, qui fasse l'angle ABD égal à l'angle BAD, et alors BD sera égal à AD (341): or, BD + DC est plus grand que BC; donc aussi AD + DC ou AC est plus grand que BC.

La réciproque se démontrera facilement et d'une manière analogue, en employant le triangle supplémentaire.

Les dernières propositions que nous venons d'établir sont utiles pour se diriger dans la résolution des triangles sphériques, où tout ce que l'on cherche se détermine par des sinus ou des tangentes, qui, appartenant indifféremment à des arcs plus petits que 90°, ou à leurs suppléments, peuvent souvent laisser dans l'incertitude sur celui de ces deux arcs qu'on doit adopter; mais ces connaissances ne sont pas suffisantes pour découvrir dans quels cas ce que l'on cherche doit être plus grand ou plus petit que 90°, dans quels cas il peut être indifféremment plus grand ou plus petit.

Moyens de reconnaître dans quels cas les angles ou les côtés qu'on cherche dans les triangles sphériques rectangles doivent être plus grands ou plus petits que 90°.

343. Quoique deux angles, et même les trois angles d'un triangle sphérique rectangle puissent être droits, et que par conséquent il puisse y avoir deux et trois hypoténuses, néanmoins nous n'appellerons *hypoténuse* que le côté opposé à l'angle droit que nous considérons, et nous appellerons les deux autres angles *angles obliques.*

344. *Chacun des deux angles obliques d'un triangle sphérique rectangle est de même espèce que le côté qui lui est opposé, c'est-à-dire qu'il lui est de* 90°, *si ce côté est de* 90°, *et plus grand ou plus petit que* 90°, *selon que ce côté est plus grand ou plus petit que* 90°.

Que B (*fig.* 172) soit l'angle droit; si B est moindre que 90°, en le prolongeant jusqu'en D, de manière que BD soit de 90°, le point D sera le pôle de l'arc AB (326); donc l'arc de grand cercle DA, conduit à l'extrémité du côté BA, sera perpendiculaire sur BA; donc l'angle DAB sera droit; donc CAB est moindre que 90°. On prouvera d'une manière semblable les deux autres cas.

345. *Si les deux côtés ou les deux angles d'un triangle sphérique rectangle sont tous deux plus petits ou tous deux plus grands que* 90°, *l'hypoténuse sera toujours plus petite que* 90°; *et au contraire elle sera plus grande que* 90°, *si les deux côtés ou les deux angles sont de différente espèce.*

Car, en supposant la même construction que dans la proposition précédente, si AB est aussi moindre que 90°, l'angle ADB, qui doit (344) être de même espèce que le côté AB, sera moindre que 90°; par la même raison, l'angle ACB sera moindre que 90°; donc ACD sera obtus, et par conséquent plus grand que ADC; donc AD sera plus grand que AC (342): or, AD est de 90°; donc AC est moindre que 90°.

Pareillement, si les deux côtés BC et AB de l'angle droit B (*fig.* 173) sont tous deux plus grands que 90°, l'hypoténuse AC sera encore plus petite que 90°; car, si l'on prend BD de 90°, D étant le pôle de l'arc AB, DA sera de 90°: or, puisque AB est de plus de 90°, l'angle ACB sera obtus (344); il en sera de même, et par la même raison, de l'angle ADB; donc ADC est aigu, et par conséquent plus petit que ACD; donc aussi AC sera plus petit que AD (342), c'est-à-dire moindre que 90°.

Au contraire, si AB (*fig.* 174) est moindre que 90°, et BC plus grand, alors l'angle ACB, qui est de même espèce que AB (344), sera aigu; il en sera de même de l'angle ADB; donc ACD sera obtus, et par conséquent plus grand que ACD; donc AC sera plus grand que AD, c'est-à-dire plus grand que 90°.

Quant aux angles comparés à l'hypoténuse, la vérité de cette proposition suit de ce que ces angles sont chacun de même espèce que le côté qui lui est opposé (344).

346. *Selon que l'hypoténuse sera plus petite ou plus grande que 90°, les côtés seront de même espèce ou de différente espèce entre eux; et il en sera de même des angles obliques.*

347. *Selon que l'hypoténuse et un côté seront de même ou de différente espèce, l'autre côté sera plus petit ou plus grand que 90°; et il en sera de même de l'angle opposé à ce dernier côté.*

Principes pour la résolution des triangles sphériques rectangles.

348. La résolution des triangles sphériques rectangles ne dépend que de trois principes que nous allons exposer successivement, et que nous éclaircirons ensuite par des exemples. Le premier de ces principes est commun aux triangles rectangles et aux triangles obliquangles.

Chaque cas des triangles sphériques rectangles peut être résolu par une seule proportion que l'on trouvera toujours par l'un ou l'autre des trois principes suivants.

349. *Dans tout triangle sphérique* ABC (*fig.* 175), *on a toujours cette proportion: Le sinus d'un des angles est au sinus de*

côté opposé à cet angle, comme le sinus d'un autre angle est au sinus du côté opposé à celui-ci.

Soient H le centre de la sphère, BH, AH, CH trois rayons: du sommet de l'angle A abaissons sur le plan du côté opposé BC la perpendiculaire AD, et par cette ligne conduisons deux plans ADE, ADF, de manière que les rayons BH, CH leur soient perpendiculaires respectivement; les lignes AE, DE, sections des deux plans ABH, CBH, avec le plan ADE, seront perpendiculaires sur l'intersection commune BH de ces deux plans, et par conséquent l'angle AED sera l'inclinaison de ces deux plans (**191**); donc il sera égal à l'angle sphérique ABC (320); par la même raison, l'angle AFD sera égal à l'angle sphérique ACB.

Cela posé, les deux triangles ADE, ADF étant rectangles en D, on aura (**295**):

R : sin AED :: AE : AD,
et sin AFD : R :: AD : AF;
donc (**100**) sin AFD : sin AED :: AE : AF.

Or, les lignes AE, AF, étant des perpendiculaires abaissées de l'extrémité A des arcs AB, AC sur les rayons BH, CH qui passent par l'autre extrémité de ces arcs, sont (269) les sinus de ces mêmes arcs; donc, et à cause que les angles AED et AFD sont égaux aux angles B et C, on a enfin

sin C : sin B :: sin AB : sin BC.

On démontrerait de la même manière que

sin C : sin A :: sin AB : sin BC.

330. Si l'un des angles comparés est droit, comme son sinus est alors égal au rayon (**274**), la proportion peut être énoncée ainsi: *Le rayon est au sinus de l'hypoténuse, comme le sinus d'un des angles obliques est au sinus du côté opposé.*

331. *Dans tout triangle sphérique rectangle, le rayon est au sinus d'un des côtés de l'angle droit, comme la tangente de l'angle oblique opposé à l'autre côté de l'angle droit est à la tangente de ce même côté.*

Soit B (*fig.* 176) l'angle droit: de l'extrémité C du côté BC,

menons CI perpendiculaire sur le rayon BD de la sphère ; et par cette droite CI, conduisons le plan CIE de manière que le rayon DA lui soit perpendiculaire. Alors l'angle IEC sera égal à l'angle sphérique A ; et puisque les deux plans DBC, DBA sont supposés perpendiculaires entre eux, la ligne CI, perpendiculaire à leur commune section DB, sera (185) perpendiculaire au plan DBA, et par conséquent (178) à la droite IE.

Cela posé, dans le triangle rectangle DIC on a (296)

$$DI : CI :: R : \text{tang}\, IDC ;$$

et dans le triangle rectangle EIC on a, par le même principe,

$$CI : IE :: \text{tang}\, IEC : R ;$$

donc (100)

$$DI : IE :: \text{tang}\, IEC : \text{tang}\, IDC, \text{ ou } :: \text{tang}\, A : \text{tang}\, BC,$$

puisque l'angle IDC a pour mesure l'arc BC. Or, dans le triangle rectangle EID on a (295)

$$DI : IE :: R : \sin IDE, \quad \text{ou} \quad \sin AB ;$$

donc, à cause du rapport commun de DI et IE, on aura

$$R : \sin AB :: \text{tang}\, A : \text{tang}\, BC.$$

332. *Dans tout triangle sphérique rectangle* ABC (fig. 177), *si l'on prolonge les deux côtés* BC, AC, *d'un des angles obliques, jusqu'en* D *et* E *de manière que* BD, AE *soient chacun de* 90°, *et qu'on joigne les extrémités* D *et* E *par un arc de grand cercle* DE, *on aura un nouveau triangle* CED *rectangle en* E, *dont les parties seront ou égales à celles du triangle* ABC, *ou leur complément.*

Imaginons les côtés AB et DE prolongés jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en F; puisque BD est de 90°, et perpendiculaire sur AB, le point D est le pôle de l'arc AB (326); donc DF est de 90°, et perpendiculaire sur AF; par la même raison, DA est de 90°.

Puisqu'on a fait AE de 90°, et que DA est aussi de 90°, le point A est le pôle de DF (325); donc AE est perpendiculaire sur DF, et par conséquent le triangle CED est rectangle en E.

Cela posé, il est évident que l'angle E est égal à l'angle B; que

l'angle DCE est égal à l'angle ACB (321) ; que le côté DC est complément de CB ; que DE, complément de EF, qui (328) est la mesure de l'angle CAB, est complément de cet angle CAB ; que CE est complément de AC, et que l'angle D, qui (328) a pour mesure BF complément de AB, est complément de AB ; donc, en effet, les parties du triangle DCE sont, ou égales aux parties du triangle ACB, ou sont leur complément.

On démontrerait la même chose du triangle AHI, qu'on formerait en prolongeant de même au-dessus de A les côtés CA et AB de l'angle oblique BAC, jusqu'à ce qu'ils fussent de 90° chacun.

353. On voit donc que, dès qu'on connaît trois choses dans le triangle ABC, on connaît aussi trois choses dans chacun des deux triangles CED, AHI. On voit en même temps que les trois autres parties qui resteraient à trouver dans le triangle ABC feraient connaître les trois autres parties de chacun de ces deux triangles CED, AHI, et réciproquement.

Donc, lorsque ayant à résoudre le triangle ABC, on ne pourra faire usage immédiatement ni de l'un ni de l'autre des deux principes posés (349 et 351), on aura recours à l'un ou à l'autre des deux triangles CED, AHI; et alors l'application de l'un ou de l'autre de ces deux principes aura lieu, et fera connaître les parties de ces triangles, qui donneront ensuite la connaissance des parties du triangle ABC, par le principe qu'on vient de poser en dernier lieu. Nous nommerons dorénavant les triangles CED, AHI *triangles complémentaires.*

Si les côtés AB, AC, ou AC, BC, que la proposition démontrée (352) suppose tous deux plus petits que 90°, étaient tous deux plus grands, ou l'un plus grand et l'autre plus petit que 90°, comme il arrive dans le triangle FBC (*fig.* 178); au lieu de calculer ce triangle FBC, on calculerait le triangle ABC formé par les arcs FC, FB prolongés jusqu'à 180° : les parties de celui-ci étant connues, feraient connaître celles du triangle FBC. Au reste, il n'est pas indispensable d'avoir recours à cet expédient; la proportion que donnera la *fig.* 177 a toujours lieu, soit que les parties du triangle soient plus petites que 90°, soit qu'elles soient plus grandes.

Remarquons, à l'égard des triangles sphériques rectangles, comme nous l'avons fait pour les triangles rectilignes rectangles, que l'angle droit étant un angle connu, il suffit, pour être en état de résoudre un triangle rectangle, de connaître deux choses outre l'angle droit. Passons aux exemples.

Exemple I. Supposons (*fig.* 177) le côté BC de $15°17'$, l'angle A de $23°42'$; on demande l'hypoténuse AC.

Pour trouver l'hypoténuse, on peut faire immédiatement usage du principe donné (349), en faisant cette proportion:

$$\sin A : \sin BC :: R : \sin AC,$$

qui n'est autre chose que la proportion énoncée (350), mais dont on a transposé les deux rapports. Cette proportion, dans le cas présent, revient à

$$\sin 23°42' : \sin 15°17' :: R : \sin AC.$$

Opérant par logarithmes, on a

Log sin 15° 17'.	9,4209330
Log du rayon.	10,0000000
Complém. arithm. du log sin de 23° 42'	0,3958304
Somme ou log sin AC.	29,8167634

qui, dans les Tables, répond à $40°59'$; en sorte que l'hypoténuse AC est de $40°59'$, si elle doit être moindre que $90°$; ou bien elle est de $139°1'$, supplément de $40°59'$, si elle doit être plus grande que $90°$; car rien ici ne détermine si l'hypoténuse AC est moindre ou plus grande que $90°$, et ces deux solutions sont également possibles, comme il est aisé de s'en convaincre par la *fig.* 178, dans laquelle les deux triangles ABC, ADE peuvent, avec le même angle A, avoir le côté BC égal au côté DE, et les hypoténuses AC, AE différentes; mais, en prolongeant AC, AB jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en F, on voit que AE est supplément de AC, parce qu'il est supplément de FE qui est égal à AC, lorsque DE est égal à BC.

Exemple II. Pour avoir le côté AB du même triangle ABC (*fig.* 177), on peut appliquer directement la proposition enseignée (351), qui fournit cette proportion:

$$R : \sin AB :: \tang A : \tang BC, \text{ ou } \tang A : \tang BC :: R : \sin AB,$$

c'est-à-dire

$$\text{tang } 23^\circ 42' : \text{tang } 15^\circ 17' :: R : \sin AB.$$

Opérant par logarithmes, on aura

Log tang 15° 17'..................	9,4365704
Log du rayon..................	10,0000000
Compl. arithm. du log tang 23° 42'..	0,3575658
Somme ou log sin AB......	19,7941362

qui, dans les Tables, répond à 38° 30'; en sorte que le côté AB est de 38°30', ou 141°30', selon qu'il doit être plus petit ou plus grand que 90°, c'est-à-dire (*fig.* 178), selon qu'il doit appartenir au triangle ABC ou au triangle ADE.

Exemple III. L'angle droit, l'angle A et le côté BC étant toujours les seules choses connues pour trouver l'angle C du même triangle (*fig.* 177), je remarque que je ne puis appliquer aucune des deux analogies enseignées (349 et 351), parce que je n'aurais que deux termes connus, soit dans l'une, soit dans l'autre; c'est pourquoi j'ai recours au triangle complémentaire DCE, dans lequel le côté DE, complément de l'angle A ou de 23° 42', sera de 66° 18'; le côté ou l'hypoténuse DC, complément de BC ou de 15° 17', sera de 74° 43', et l'angle DCE est égal à l'angle ACB qu'il s'agit de trouver: or dans ce triangle DCE, je puis appliquer le principe donné (350), en disant

$$\sin DC : R :: \sin DE : \sin DCE,$$

c'est-à-dire

$$\sin 74^\circ 43' : R :: \sin 66^\circ 18' : \sin DCE.$$

Opérant par logarithmes:

Log sin 66° 18'....................	9,9617355
Log du rayon....................	10,0000000
Complém. arithm. du log sin 74° 43'..	0,0156374
Somme ou log sin DCE............	19,9773729

qui, dans les Tables, répond à 71° 40'; donc l'angle DCE, et par conséquent l'angle demandé ACB est de 71° 40', ou de 108° 20', supplément de 71° 40'; car, puisque rien ne détermine ici si le triangle ACB est tel que le triangle ACB de la *fig.* 178, ou tel

que le triangle AED de la même figure, il demeure incertain si l'on doit prendre l'angle ACB ou l'angle AED qui en est le supplément.

EXEMPLE IV. Que le côté AB du triangle ABC (*fig.* 177) soit de 48°51′, et le côté BC de 37°45′; si l'on veut avoir l'hypoténuse AC, ou aura recours au triangle complémentaire DCE, dans lequel on connaît alors l'hypoténuse DC complément de BC ou de 37°45′, et qui sera par conséquent de 52°15′; on connaît aussi l'angle D, qui a pour mesure BF complément de AB ou de 48°51′, et qui sera par conséquent de 41°9′; et pour avoir l'hypoténuse AC, il n'y aura qu'à calculer le côté CE, qui, étant son complément, le fera connaître. Or, dans le triangle DCE, pour avoir CE, on fera cette proportion (380),

$$R : \sin DC :: \sin D : \sin CE,$$

c'est-à-dire

$$R : \sin 52°15' :: \sin 41°9' : \sin CE.$$

Opérant par logarithmes, on aura

Log sin 41°9′	9,8182474
Log sin 52°15′	9,8980060
Somme	19,7162534
Log du rayon	10,0000000
Reste ou log sin	9,7162534

qui, dans les Tables, répond à 31°21′; donc AC, qui en est le complément, ne peut être que 58°39′; car les deux côtés AB, AC étant de même espèce, l'hypoténuse doit (345) être moindre que 90°.

EXEMPLE V. Les mêmes choses étant données, pour trouver l'angle C ou l'angle A, on appliquera directement la proposition (381), qui pour l'angle A donne

$$R : \sin AB :: \tang A : \tang BC \text{ ou } \sin AB : R :: \tang BC : \tang A,$$

c'est-à-dire

$$\sin 48°51' : R :: \tang 37°45 : \tang A;$$

et par la même raison, on aura pour l'angle C,

$$\sin BC : R :: \tang AB : \tang C,$$

c'est-à-dire

$$\sin 37^\circ 45' : R :: \text{tang}\, 48^\circ 51' : \text{tang}\, C.$$

Opérant par logarithmes, on aura

Pour l'angle A,

Log tang 37° 45'....................	9,8888996
Log du rayon....................	10,0000000
Compl. arithm. du log sin 48° 51'...	0,1232111
Somme ou log tang A........	10,0121107

Pour l'angle C,

Log tang 48° 51'....................	10,0585415
Log du rayon....................	10,0000000
Compl. arithm. du log sin 37° 45'...	0,2130944
Somme ou log tang C........	10,2716359

après avoir ôté une unité au premier chiffre, selon ce qui a été dit (297),

qui, dans les Tables, répondent à 45° 48' et 61° 51', qui sont, le premier, la valeur de l'angle A, et, le second, la valeur de l'angle C, parce que les deux côtés AB, BC étant tous deux plus petits que 90°, les deux angles A et C doivent aussi (344) être tous deux plus petits que 90°.

Ces exemples suffisent pour faire voir comment on doit se conduire dans les autres cas; mais, pour épargner à ceux qui auraient de ces sortes de calculs à faire la peine de recourir aux triangles complémentaires, nous joignons ici une Table qui indique quelle proportion il faut faire dans chaque cas.

Table pour la réduction de tous les cas possibles des Triangles sphériques rectangles (*).

Étant donnés.	*Trouver.*	*Proportion à faire.*	*Cas où ce que l'on cherche doit être moindre de 90°.*
AB, AC	C	Sin AC : R :: sin AB : sin C	Si AB est moindre que 90°.
	A	Cot AB : cot AC :: R : cos A	Si AB et AC sont de même espèce.
	BC	Cos AB : cos AC :: R : cos BC	Si AB et AC sont de même espèce.
AB, BC	A	Sin AB : R :: tang BC : tang A	Si BC est moindre que 90°.
	C	Sin BC : R :: tang AB : tang C	Si AB est moindre que 90°.
	AC	R : cos BC :: cos AB : cos AC	Si AB et BC sont de même espèce.
AB, A	C	R : cos AB :: sin A : cos C	Si AB est moindre que 90°.
	AC	R : cos A :: cot AB : cot AC	Si AB et A sont de même espèce.
	BC	R : sin AB :: tang A : tang BC	Si A est moindre que 90°.
AB, C	A	Cos AB : R :: cos C : sin A	Douteux.
	AC	Sin C : sin AB :: R : sin AC	Douteux.
	BC	Tang C : tang AB :: R : sin BC	Douteux.
BC, AC	A	Sin AC : R :: sin BC : sin A	Si BC est moindre que 90°.
	C	Cot BC : cot AC :: R : cos C	Si AC et BC sont de même espèce.
	AB	Cos BC : cos AC :: R : cos AB	Si AC et BC sont de même espèce.
BC, A	C	Cos BC : R :: cos A : sin C	Douteux.
	AC	Sin A : sin BC :: R : sin AC	Douteux.
	AB	Tang A : tang BC :: R : sin AB	Douteux.
BC, C	A	R : cos BC :: sin C : cos A	Si BC est moindre que 90°.
	AC	R : cos C :: cot BC : cot AC	Si BC et C sont de même espèce.
	AB	R : sin BC :: tang C : tang AB	Si C est moindre que 90°.
AC, C	C	Cos AC : R :: cot A : tang C	Si AC et A sont de même espèce.
	AB	Cos A : R :: cot AC : cot AB	Si AC et A sont de même espèce.
	BC	R : sin AC :: sin A : sin BC	Si A est moindre que 90°.
AC, C	A	C : cos AC :: tang C : cot A	Si AC et C sont de même espèce.
	AB	R : sin AC :: sin C : sin AB	Si C est moindre que 90°.
	BC	Cos C : R :: cot AC : cot BC	Si AC et C sont de même espèce.
A, C	AC	Tang C : cot A :: R : cos AC	Si A et C sont de même espèce.
	AB	Sin A : cos C :: R : cos AB	Si C est moindre que 90°.
	BC	Sin C : cos A :: R : cos BC	Si A est moindre que 90°.

(*) Cette Table se rapporte au triangle ABC de la *fig.* 177, dans laquelle B est l'angle droit.

Les proportions que renferme cette Table sont toutes fondées sur les deux principes enseignés (349 et 351), et appliquées, soit immédiatement au triangle ABC, soit aux triangles complémentaires, puis transportées au triangle ABC. Par exemple, la première est la proportion même du n° 349 ou du n° 350, appliquée immédiatement au triangle ABC, en renversant seulement les deux rapports; la seconde est la proportion du n° 351, appliquée au triangle complémentaire CED, dans lequel on a R : sin DE :: tang D : tang CE, ou, en rapportant au triangle ABC, R : cos A :: cot AB : cot AC, ou, en mettant le premier rapport à la place du second, cot AB : cot AC :: R : cos A.

On trouvera de même les autres proportions que renferme cette Table; les inversions qu'on y a faites dans les proportions que donneraient immédiatement les deux principes (349 et 351) ne sont pas indispensables; elles n'ont pour objet que de faire que la quantité cherchée soit le quatrième terme de la proportion.

C'est par des triangles sphériques rectangles qu'on calcule les ascensions droites, et les déclinaisons des astres, par le moyen de leur longitude et de leur latitude, et réciproquement; mais ce n'est point encore ici le lieu d'exposer les notions d'Astronomie que ces objets supposent.

Des Triangles sphériques obliquangles.

354. Les triangles sphériques rectangles se résolvent dans tous les cas par une seule analogie, ainsi qu'on vient de le voir. Il n'en est pas de même des triangles sphériques obliquangles : dans plusieurs cas il faut faire deux analogies. Ces cas exigent qu'on abaisse de l'un des angles du triangle proposé un arc de grand cercle, perpendiculairement sur le côté opposé. Comme cet arc peut tomber ou sur le côté même, ou sur le prolongement de ce côté, selon les différents rapports de grandeur des côtés et des angles, il convient, avant d'établir les principes de la résolution de ces sortes de triangles, de faire distinguer les cas où l'arc perpendiculaire tombe en dedans du triangle, de ceux où il tombe au dehors.

385. *L'arc de grand cercle* AD (fig 180), *abaissé perpendiculairement de l'angle* A *d'un triangle sphérique sur le côté opposé, tombe dans le triangle, quand les deux autres angles* B *et* C *sont de même espèce, et au dehors, quand ils sont de différente espèce.*

Car, dans les triangles rectangles ADC, ADB (*fig.* 180), les deux angles B et C doivent être chacun de même espèce que le côté opposé AD (**344**); donc ils doivent être de même espèce entre eux.

Dans les triangles ADC, ADB de la *fig.* 181, les angles ACD, ABD doivent être de même espèce chacun que le côté opposé AD; donc, puisque ABC est supplément de ABD, ABC et ACD doivent être de différente espèce.

Principes pour la Résolution des Triangles sphériques obliquangles.

386. La résolution de tous les cas possibles des triangles sphériques obliquangles porte sur cinq principes que nous allons faire connaître, et sur la résolution des triangles rectangles: tous ces principes ne sont pas nécessaires à la fois pour chaque cas; mais ils le sont pour être en état de les résoudre tous.

De ces cinq principes, nous en avons déjà établi deux, ce sont ceux qui sont énoncés aux n^{os} **336** et **349**: voici les trois autres.

387. *Dans tout triangle sphérique* ABC (fig. 179), *si d'un angle* A *on abaisse l'arc de grand cercle* AD *perpendiculairement sur le côté opposé* BC, *on aura toujours cette proportion: Le cosinus du segment* BD *est au cosinus du segment* CD, *comme le cosinus du côté* AB *est au cosinus du côté* AC.

Soit G le centre de la sphère: du sommet de l'angle A abaissons sur le plan BGC de l'arc BC la perpendiculaire AI, elle sera dans le plan AGD de l'arc AD. Conduisons par AI les deux plans AIE, AIF, de manière que les rayons GB, GC leur soient respectivement perpendiculaires; et du point D menons les perpendiculaires DH, DK sur les mêmes rayons.

Les triangles GIE, GDH seront semblables, à cause des lignes IE, DH perpendiculaires sur GD; par une raison semblable, les triangles GDK, GIF sont semblables. On a donc ces deux proportions :

GH : GE :: GD : GI,
et GK : GF :: GD : GI.

Donc, à cause du rapport commun de GD à GI, on a GH : GE :: GK : GF. Or, GH est le cosinus de BD (270), GE le cosinus de AB, GK le cosinus de GD, et GF celui de AC; donc cos BD : cos AB :: cos CD : cos AC, ou, en mettant le troisième terme à la place du second, et le second à la place du troisième

cos BD : cos CD :: cos AB : cos AC.

388. *Les mêmes choses étant supposées que dans la proposition précédente, on a cette autre proportion: Le sinus de* BD *est au sinus de* CD *comme la cotangente de l'angle* B *est à la cotangente de l'angle* C.

Car les angles AEI, AFI sont égaux aux angles B et C chacun à chacun, ainsi que nous l'avons vu dans la démonstration du n° 349; donc, puisque les triangles AIE, AIF sont rectangles, les angles EAI, FAI sont compléments des angles AEI, AFI, et par conséquent des angles B et C.

Cela posé, dans le triangle AEI, on a (296) R : tang EAI ou cot B :: AI : IE; et dans le triangle rectangle AIF, on a R : tang IAF ou cot C :: AI : IF; donc (100) cot C : cot B :: IF : IE.

Mais les triangles semblables GFI, GKD, et les triangles semblables GEI, GHD donnent

IF : DK :: GI : GD,
et IE : DH :: GI : GD;
donc IF : DK :: IE : DH,
ou IF : IE :: DK : DH.

Donc aussi cotC : cot B :: DK : DH. Or, DK et DH sont les sinus des segments DC et DB; donc enfin cot C : cot B :: sin DC : sin DB.

339. *Dans tout triangle sphérique* ABC (fig. 180), *si d'un angle* A *on abaisse l'arc perpendiculaire* AD *sur le côté opposé* BC, *on a cette proportion : La tangente de la moitié du côté* BC *est à la tangente de la moitié de la somme des deux autres côtés, comme la tangente de la moitié de la différence est à la tangente de la moitié de la différence des deux segments* CD, BD, *ou* (fig. 181) *à la tangente de la moitié de leur somme.*

On vient de voir (337) que $\cos AB : \cos AC :: \cos BD : \cos CD$; donc (98) $\cos AB + \cos AC : \cos AB - \cos AC :: \cos BD + \cos CD : \cos BD - \cos CD$; mais (287) $\cos AB + \cos AC : \cos AB - \cos AC :: \cot \frac{AC + AB}{2} : \text{tang} \frac{AC - AB}{2}$; et par la même raison, $\cos BD + \cos CD : \cos BD - \cos CD :: \cot \frac{CD + BD}{2} : \text{tang} \frac{CD - BD}{2}$; donc $\cot \frac{AC + AB}{2} : \text{tang} \frac{AC - AB}{2} :: \cot \frac{CD + BD}{2} : \text{tang} \frac{CD - BD}{2}$, ou $\cot \frac{AC + AB}{2} : \cot \frac{CD + BD}{2} :: \text{tang} \frac{AC - AB}{2} : \text{tang} \frac{CD - BD}{2}$, ou, à cause que (280) les cotangentes sont réciproquement proportionnelles aux tangentes, $\text{tang} \frac{CD + BD}{2} : \text{tang} \frac{AC + AB}{2} :: \text{tang} \frac{AC - AB}{2} : \text{tang} \frac{CD - BD}{2}$. Or, dans la *fig.* 180, $CD + DB$ est BC; et dans la *fig.* 181, $CD - BD$ est BC; donc, pour la *fig.* 180, on a $\text{tang} \frac{BC}{2} : \text{tang} \frac{AC + AB}{2} :: \text{tang} \frac{AC - AB}{2} : \text{tang} \frac{CD - BD}{2}$; et pour la *fig.* 181, on a $\text{tang} \frac{CD + BD}{2} : \text{tang} \frac{AC + AB}{2} :: \text{tang} \frac{AC - AB}{2} : \text{tang} \frac{BC}{2}$, ou $\text{tang} \frac{BC}{2} : \text{tang} \frac{AC + AB}{2} :: \text{tang} \frac{AC - AB}{2} : \text{tang} \frac{CD + BD}{2}$.

Résolution des triangles sphériques obliquangles.

360. Les principes que nous venons d'exposer, et la seconde proportion de la Table que nous avons donnée pour les triangles rectangles, suffisent pour la résolution des triangles sphériques obliquangles, ou du moins pour déterminer les sinus ou les tangentes des différentes parties qui les composent : il y a plusieurs cas où trois choses données suffisent pour déterminer tout le reste ; mais il y en a plusieurs aussi où la question reste indéterminée, parce que ces données ne sont pas suffisantes pour décider si la chose cherchée est moindre ou plus grande que 90°. Cependant, quoique à envisager la chose généralement, le nombre de ces derniers cas soit assez considérable, il est très-rare, dans les usages ordinaires de la Trigonométrie sphérique, qu'on ne sache pas de quelle espèce doit être le côté ou l'angle qu'on demande.

Avant que d'entrer en matière, rappelons-nous que le sinus, le cosinus, la tangente et la cotangente d'un angle ou d'un arc, sont les mêmes pour cet angle ou cet arc que pour son supplément.

361. On peut réduire le calcul des triangles obliquangles aux six cas que nous allons d'abord résoudre, et nous en déduirons ensuite la résolution des autres.

Question I. *Étant donnés deux côtés* AB, AC, *et un angle opposé* B (fig. 180), *trouver l'angle opposé à l'autre côté donné.*

Faites cette proportion (349), sin AC : sin AB :: sin B : sin C. L'angle C peut être de plus ou de moins de 90°.

Question II. *Étant donnés deux côtés* AB, AC (fig. 180), *et un angle opposé* B, *trouver le troisième côté* BC.

De l'angle A opposé au côté cherché, imaginez l'arc perpendiculaire AD ; et dans le triangle rectangle ADB, calculez le segment BD par cette proportion, qui revient au même que la seconde de la Table ci-dessus, page 220,

$$\cos B : R :: \cot AB : \cot BD;$$

ou bien par cette autre,

$$R : \cos B :: \tang AB : \tang BD,$$

qui revient au même, puisque (280) les tangentes sont réciproquement proportionnelles aux cotangentes.

Et pour avoir le second segment CD, faites cette autre proportion (357),

$$\cos AB : \cos AC :: \cos BD : \cos CD.$$

Alors, selon que AD tombe dans le triangle ou hors du triangle, vous aurez BC, en prenant ou la somme ou la différence de BD et DC.

Question III. *Étant donnés les deux angles* B *et* C (fig. 180), *et un côté opposé* AB, *trouver le côté intercepté* BC.

De l'angle A opposé au côté cherché BC, imaginez l'arc perpendiculaire AD; et dans le triangle rectangle ADB, calculez BD par la même proportion que dans la question II, savoir :

$$R : \cos B :: \tang AB : \tang BD.$$

Pour avoir le second segment CD, faites cette autre proportion (358),

$$\cot B : \cot C :: \sin BD : \sin CD.$$

Et pour avoir BC, prenez la somme ou la différence de CD et de BD, selon que la perpendiculaire tombe dans le triangle ou hors du triangle.

Question IV. *Étant donnés deux côtés* AB, BC (fig. 180) *et l'angle compris* B, *trouver le troisième côté* AC.

De l'un A des deux angles inconnus, imaginez l'arc perpendiculaire AD sur le côté opposé BC; calculez le segment BD par la même proportion que dans la question II,

$$R : \cos B :: \tang AB : \tang BD.$$

Retranchez BD du côté connu BC (*fig.* 180), ou ajoutez-le

à ce côté (*fig.* 181), et vous aurez le segment CD; alors, pour avoir AC, faites cette proportion (357),

$$\cos BD : \cos CD :: \cos AB : \cos AC.$$

QUESTION V. *Étant donnés deux côtés* AB, BC (fig. 180), *et l'angle compris* B, *trouver l'un de ces deux autres angles, par exemple l'angle* C.

Du troisième angle A, abaissez l'arc perpendiculaire AD sur le côté opposé BC; calculez le segment BD par la même proportion que dans la question II,

$$R : \cos B :: \text{tang } AB : \text{tang } BD.$$

Retranchez BD du côté connu BC (*fig.* 180), ou ajoutez-le à ce côté (*fig.* 181), et vous aurez le segment CD; et pour avoir l'angle C, faites cette proportion (358),

$$\sin BD : \sin CD :: \cot B : \cot C.$$

QUESTION VI. *Étant donnés les trois côtés* AB, AC, BC (fig. 180), *trouver un angle, par exemple l'angle* B.

Ayant imaginé l'arc AD perpendiculaire sur le côté BC adjacent à l'angle cherché, calculez la demi-différence des deux segments BD, DC par cette proportion (359),

$$\text{tang } \frac{BC}{2} : \text{tang } \frac{AB + AC}{2} :: \text{tang } \frac{AC - AB}{2} : \text{tang } \frac{CD - BD}{2}.$$

Ayant trouvé cette demi-différence, retranchez-la de la moitié de BC, et vous aurez (301) le plus petit segment BD. Alors, pour avoir l'angle B, vous ferez cette proportion qui est toujours celle de la question II, mais que l'on a renversée,

$$\text{tang } AB : \text{tang } BD :: R : \cos B.$$

Si la perpendiculaire devait tomber hors du triangle, la première proportion, au lieu de donner la demi-différence, donnerait la demi-somme; c'est pourquoi il faudrait alors, pour avoir le plus petit segment BD (*fig.* 181), retrancher la moitié de BC de cette demi-somme, parce que c'est BC qui est la différence des deux segments.

On peut encore résoudre cette question par une règle semblable à celle que nous avons donnée pour un cas analogue dans les triangles rectilignes. Voici cette règle.

Prenez la moitié de la somme des trois côtés; de cette demi-somme retranchez successivement chacun des deux côtés qui comprennent l'angle cherché, ce qui vous donnera deux restes.

Alors, au double du logarithme du rayon ajoutez les logarithmes des sinus de ces deux restes, et du total retranchez la somme des logarithmes des sinus des deux côtés qui comprennent l'angle cherché. Le reste sera le logarithme du carré du sinus de la moitié de cet angle. Prenez la moitié de ce logarithme restant, et cherchez à quel nombre de degrés et minutes elle répond dans la Table; ce sera la moitié de l'angle demandé.

Nous démontrerons cette règle dans la troisième partie.

362. Ces six cas exposés, voici comment on peut en déduire les six autres.

Question VII. *Étant donnés deux angles* F *et* G (fig. 182), *et un côté opposé* GE, *trouver le côté* EF *opposé à l'autre angle connu* G.

Imaginez le triangle supplémentaire ABC ; prenant les suppléments des angles F et G, et du côte GE, vous aurez (356) les côtés AC, AB et l'angle B ; si vous calculez l'angle C par ce qui a été dit dans la question I, son supplément sera le côté EF (356).

Au reste, ce n'est que pour conserver l'analogie avec les cas suivants, que nous donnons cette solution ; car la question présente se résout immédiatement par la proposition enseignée (349), en faisant cette proportion,

$$\sin F : \sin GE :: \sin G : \sin FE.$$

Question VIII. *Étant donnés deux angles* F *et* G (fig. 182), *et un côté opposé* GE, *trouver le troisième angle* E.

Prenez les suppléments des trois choses données, et vous con-

naîtrez dans le triangle supplémentaire ABC, AC, AB et l'angle B; calculez donc le côté BC par la question II; le supplément de ce côté sera la valeur de l'angle E (336).

QUESTION IX. *Étant donnés les deux côtés* EG, EF (fig. 182), *et un angle opposé* G, *trouver l'angle* E *compris entre les deux côtés connus.*

Prenez les suppléments des trois choses données, et dans le triangle supplémentaire ABC vous connaîtrez l'angle B, l'angle C et le côté AB; il s'agira de calculer le côté BC, ce qui se fera par la question III. Le supplément de BC sera la valeur de l'angle E (336).

QUESTION X. *Étant donnés deux angles* G *et* E (fig. 182), *et le côté intercepté* GE, *trouver le troisième angle* F.

Prenez les suppléments des trois choses données, et dans le triangle supplémentaire ABC vous connaîtrez AB, BC, et l'angle compris B; il s'agira de calculer AC, ce qui se fera par la question IV. Le supplément de AC sera l'angle demandé F (336).

QUESTION XI. *Étant donnés deux angles* G *et* E (fig. 182), *et le côté intercepté* GE, *trouver l'un des deux autres côtés; trouver* FE *par exemple.*

Prenez les suppléments des trois choses données, et dans le triangle supplémentaire ABC vous connaîtrez AB, BC, et l'angle compris B; il s'agira de calculer l'angle C, ce qui se fera par la question V. Le supplément de C sera la valeur du côté FE (336).

QUESTION XII. *Étant donnés les trois angles* E, F, G (fig. 182), *trouver l'un des côtés, le côté* EG *par exemple.*

Prenez les suppléments des trois choses données, et dans le triangle supplémentaire ABC vous connaîtrez les trois côtés BC, AC, AB; il s'agira de calculer l'angle B, ce qui se fera par la question VI. Le supplément de B sera la valeur du côté cherché EG (336).

Avant de passer aux exemples, remarquons que, quoique plusieurs cas des triangles obliquangles exigent deux analo-

gies, il y a cependant une espèce de triangles obliquangles qui peut toujours être résolue par une seule analogie, ce sont ceux dont un côté est de 90°; car, en employant le triangle supplémentaire, ce triangle devient un triangle rectangle.

Donnons maintenant quelques exemples.

Exemple de la **Question** IV. Supposons que le point F (*fig.* 166) marque la position de Paris sur la terre; le point G, celle de Toulon: on sait, par les observations astronomiques, que la latitude de Paris, ou l'arc BF, est de 48° 50′ (*); que la latitude de Toulon, ou l'arc GE, est de 43° 7′, et que la différence de longitude entre Paris et Toulon, ou l'arc BE, ou l'angle BAE ou FAG, est de 3° 37′: on demande quelle est la plus courte distance de Paris à Toulon.

Le chemin le plus court pour aller d'un point à un autre sur la surface d'une sphère, est l'arc de grand cercle qui passe par ces deux points. Imaginons l'arc FG de grand cercle. Si, des arcs AB, AE, de 90° chacun, nous retranchons les arcs BF, GE qui sont de 48° 50′ et 43° 7′, nous aurons les arcs AF, AG de 41° 10′ et de 46° 53′. Nous connaîtrons donc, dans le triangle AFG, les deux côtés AF, AG, et l'angle compris FAG; il est question de calculer le troisième côté FG.

Représentons le triangle FAG par le triangle ABC (*fig.* 183), et supposons AB de 41° 10′, BC de 46° 53′, et l'angle B de 3° 37′; alors, selon la règle donnée dans la Question IV, je calcule le segment BD par cette proportion :

R : cos 3° 37′ :: tang 41° 10′ : tang BD.

Opérant par logarithmes, j'ai

Log cos 3° 37′......................	9,9991342
Log tang 41° 10′..................	9,9417135
Somme.....................	19,9408477
Log du rayon.....................	10,0000000
Reste ou log tang BD.............	9,9408477

(*) Nous négligeons les secondes dans cet exemple.

qui, dans la Table, répond à 41° 7'; retranchant 41° 7' de BC, c'est-à-dire de 46° 53', nous aurons 5° 46' pour le segment CD.

Pour trouver le côté AC, je fais, conformément à ce qui a été prescrit dans la Question IV, cette proportion

$$\cos 41° 7' : \cos 5° 46' :: \cos 41° 10' : \cos AC.$$

Et opérant par logarithmes, j'ai

Log cos 41° 10'....................	9,8766785
Log cos 5° 46'....................	9,9977966
Compl. arithm. du log cos 41° 7'....	0,1229904
Somme ou log cos AC......	19,9974655

d'où, par les Tables, on conclut que AC est de 6° 11', qui, à raison de 20 grandes lieues par degré, valent 124 grandes lieues à très peu près; mais, en lieues moyennes, ou de 25 au degré, cela revient à 154 lieues environ.

Exemple de la Question VI. Nous avons dit (138), en parlant de la manière de lever les plans, que nous donnerions les moyens de réduire les angles observés au-dessus ou au-dessous d'un plan horizontal, à ceux qu'on observerait dans ce plan même. En voici la méthode.

Supposons que A, B, C (*fig.* 184) soient trois points différemment élevés au-dessus du plan horizontal HE, et imaginons les perpendiculaires B*b*, A*a*, C*c* sur ce plan; on aura un triangle *abc* dont les sommets *a*, *b*, *c* représentent les objets A, B, C, de la manière dont ils doivent être représentés sur une carte.

Supposant qu'on ait pu, du point A, observer les deux points B et C, on demande ce qu'il faut faire pour déterminer l'angle *a*.

On mesurera au point A l'angle BAC et les angles BA*a*, CA*a*; le premier peut être mesuré sans aucune difficulté; à l'égard de chacun des deux autres, de l'angle BA*a* par exemple, on disposera l'instrument dans le plan vertical qu'on imagine passer par AB, et plaçant un des diamètres

horizontalement, par le moyen du fil-à-plomb, qui alors marquera la ligne Aa, on dirigera l'autre diamètre au point B, et l'on verra sur l'instrument combien il y a de degrés entre le fil-à-plomb et le diamètre dirigé au point B, ce qui donnera l'angle BAa ; on trouvera de même l'angle CAa.

Cela posé, si l'on conçoit que d'un rayon quelconque AD et du point A comme centre, on ait décrit les arcs DF, DG, GF dans les plans des angles BAC, BAa, CAa, on aura un triangle sphérique DGF, dans lequel on connaîtra les côtés DF, DG, GF, mesure des angles BAC, BAa, CAa qu'on a observés; l'angle DGF de ce triangle sera égal à l'angle bac, puisque les deux droites ba, ac étant perpendiculaires à l'intersection Aa des deux plans Ab, Ac, font le même angle que ces plans, et par conséquent (520) un angle égal à l'angle sphérique DGF.

Supposons donc que les angles observés BAC, DAa, CAa, soient respectivement de 82° 10′, 77° 42′, 74° 24′; il s'agit donc (*fig.* 180) de calculer l'angle B opposé au côté AC de 82° 10′ dans le triangle sphérique ABC, dont les trois côtés AB, AC, BC sont respectivement de 74° 24′, 82° 10′, 77° 42′. Donc, conformément à ce qui a été dit dans la Question VI, je calcule la demi-différence des deux segments BD et CD par cette proportion, $\text{tang}\,\frac{BC}{2} : \text{tang}\,\frac{AC+AB}{2} :: \text{tang}\,\frac{AC-AB}{2}$ $: \text{tang}\,\frac{CD-BD}{2}$, c'est-à-dire tang 38° 51′ : tang 78° 17′ :: tang 3° 53′ : $\text{tang}\,\frac{CD-BD}{2}$.

Opérant par logarithmes, j'ai

Log tang 3° 53′	8,8317478
Log tang 78° 17′	10,6832050
Compl. arith. du log tang 38° 51′	0,0939569
Somme ou log tang $\frac{CD-BD}{2}$	19,6089097

qui répond à 22° 7′.

Retranchant 22° 7′ qui est la demi-différence de la moitié

de BC, c'est-à-dire de 38°51′, nous aurons (301) le plus petit segment BD de 16°44′; alors, dans le triangle rectangle ADB, pour avoir l'angle B, je fais, conformément à ce qui a été dit dans la Question VI, cette proportion, tang AB : tang BD :: R : cos B, c'est-à-dire tang 74°24′ : tang 16°44′ :: R : cos B.

Opérant par logarithmes, j'ai

Log tang 16°44′....................	9,4780592
Log du rayon....................	10,0000000
Compl. arith. du log tang 74°24′....	89,4459232
Somme ou log cos AB.......	108,9239824

qui répond à 4°48′, dont le complément 85°12′ est la valeur de l'angle B, c'est-à-dire (*fig.* 184) de l'angle *bac*.

Pour réduire l'angle C à l'angle *c*, on ferait un calcul semblable, en supposant qu'on eût observé l'angle ACB, l'angle AC*c* et l'angle BC*c*.

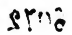
A l'égard du troisième angle *b*, il n'est pas nécessaire de le calculer, parce que le triangle *abc* étant rectiligne, ses trois angles valent deux droits.

REMARQUE.

En supposant toujours qu'aucune partie d'un triangle sphérique n'est de plus de 180°, on peut déterminer, par une règle assez simple, si ce qu'on cherche doit être moindre que 90°, ou s'il peut indifféremment être plus grand ou plus petit. Voici cette règle :

Si le quatrième terme de l'analogie ou proportion que vous êtes obligé de faire pour résoudre un triangle sphérique, est un sinus, l'arc auquel il appartiendra peut indifféremment être de moins ou de plus de 90°, excepté le cas où, le triangle étant rectangle, il se trouverait parmi les trois choses connues, une qui serait opposée dans le triangle à celle que l'on cherche. Dans ce cas (344), ces deux dernières quantités sont toujours de même espèce entre elles.

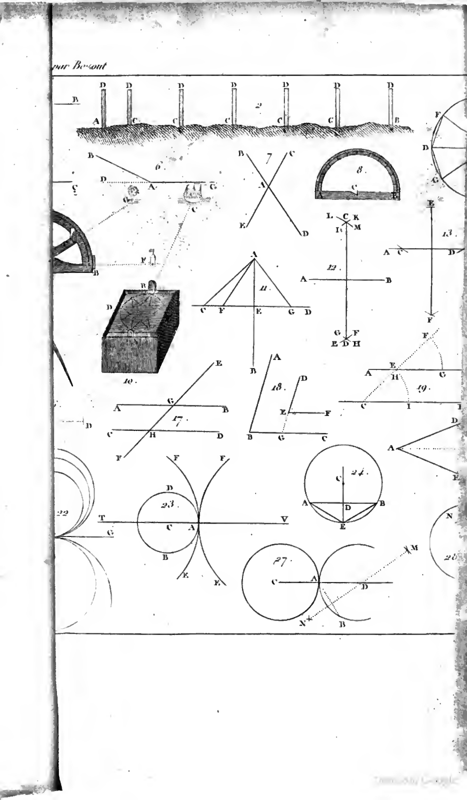
Mais si le quatrième terme est un cosinus, ou une cotangente, ou une tangente, alors observez, à l'égard des termes connus de la proportion, la règle suivante : Donnez le signe + au rayon et à tous les sinus, soit que les arcs auxquels ils appartiennent soient plus grands, soit qu'ils soient plus petits que 90°. Donnez pareillement le signe + à tous les cosinus, tangentes et cotangentes des arcs plus petits que 90°; et, au contraire, donnez le

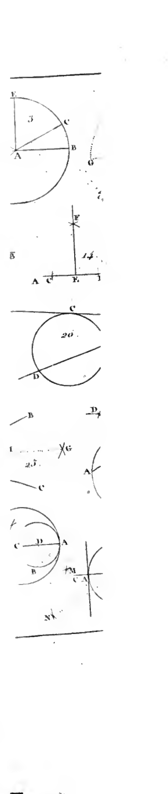


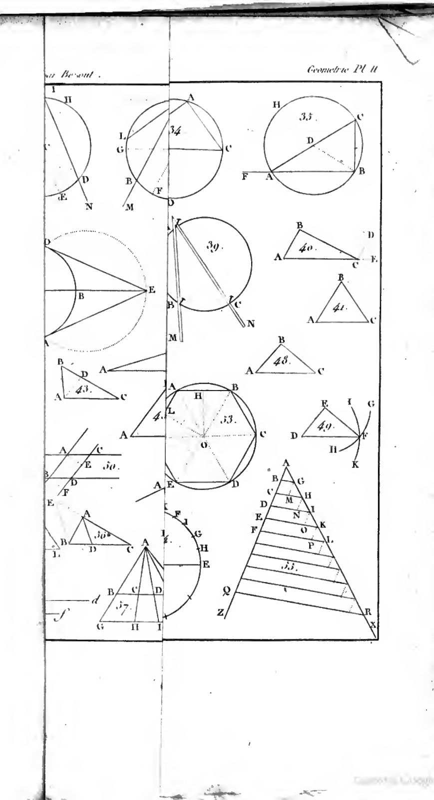
signe — à tous les cosinus, tangentes et cotangentes des arcs plus grands que 90°. Alors, si le nombre des signes — est zéro ou pair, l'arc qui répond au quatrième terme sera toujours moindre que 90°; il sera au contraire plus grand que 90° si le nombre des signes — est impair.

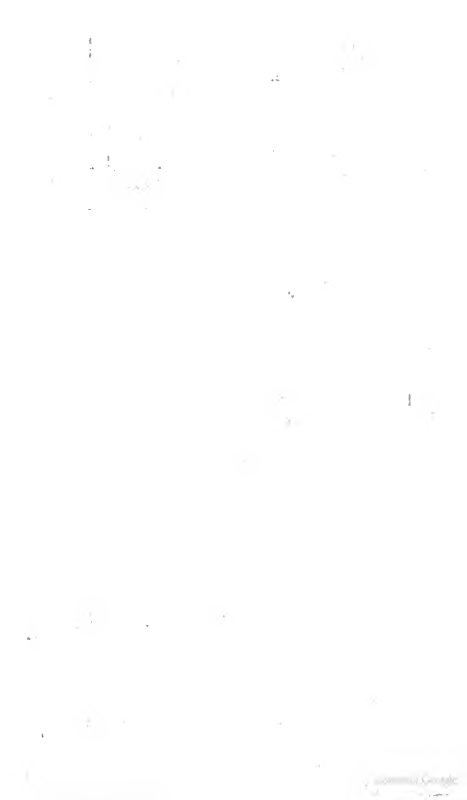
Cette règle est fondée, 1° sur la règle pour la multiplication et la division des quantités considérées par rapport à leurs signes : on verra cette dernière dans l'Algèbre ; 2° sur ce qui a été observé (273 et suiv.) relativement aux sinus, cosinus, etc., des arcs plus petits ou plus grands que 90°.

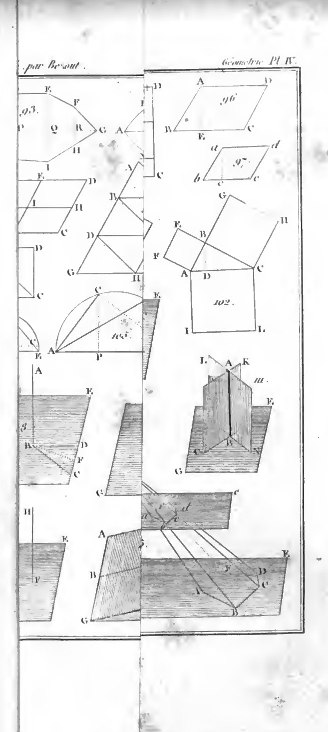



par Bezout


E
3
C
A
B
G
F
14
A
C
E
C
20
D
B
D
G
25
C
A
C
D
A
B
M
C
A
N






93.
96.
97.
102.
103.
111.

